



# Refracción del oleaje en presencia de corrientes y variaciones del fondo marino

G. Díaz-Hernández y R. Silva-Casarín

*Grupo de Ingeniería de Costas y Puertos. Instituto de Ingeniería, UNAM*  
Email: [gabriel@litoral.iingen.unam.mx](mailto:gabriel@litoral.iingen.unam.mx) y [rodo@litoral.iingen.unam.mx](mailto:rodo@litoral.iingen.unam.mx)

(recibido: mayo de 2000; aceptado: noviembre de 2000)

## Resumen

Se presenta un modelo numérico para estudiar el fenómeno de la refracción del oleaje inducida por la presencia de corrientes, cambios batimétricos, rotura y disipación. El modelo calcula sobre una malla computacional la altura y la dirección local del oleaje. El programa considera los efectos de asomeramiento, refracción, interacción oleaje-corriente y su no-linearidad. Los principios que utiliza el modelo son dos; la irrotacionalidad del número de onda, que para batimetría plana se reduce a la *ley de Snell* y el principio de conservación de la acción de ondas, que se simplifica al concepto de la conservación de la energía cuando no existen corrientes. El método diferencial que se utiliza para el cálculo e interpolación de datos sobre la malla de discretización es Lax-Wendroff en dos pasos. Se muestran tres casos que ayudan a representar el método en su totalidad: el primero se modela con base en una batimetría idealizada, plana y horizontal, el segundo se simula a partir del modelo experimental de Berkhoff (1982), y finalmente se reproduce el ejemplo propuesto por Noda (1974).

Descriptores: transformación del oleaje, propagación del oleaje, disipación del oleaje, refracción del oleaje.

## Abstract

*A method for solving the wave refraction phenomena through a computational model, which solves the wave height and propagation angle from deep to shallow water including wave breaking, is shown. The program considers the shoaling and refraction effects, wave-currents interaction and the non-linearity assumption. The numerical model is based in two principles: the irrotationality of the wave number, which is reduced to the Snell's law for planar bathymetry, and the conservation of wave action, which is reduced to the energy conservation concept when no current interaction occurs. The two-step Lax-Wendroff differential method was used to calculate and solve the entire computational grid. Three different examples that help represent the whole method are shown; the first case is based on an idealized plane and horizontal bathymetry, the second case is the experimental model developed by Berkhoff (1982), and finally the Noda (1974) example is reproduced.*

*Keywords: wave refraction, wave propagation, wave dissipation, wave transformation..*

## Introducción

La importancia del oleaje no debe ser subestimada en la costa, ello puede ser el origen del movimiento de arena a lo largo de la playa, causando erosión o daño a estructuras durante una tormenta. En mar abierto, las plataformas petroleras deben ser capaces de soportar el oleaje generado por severos huracanes.

En México, son pocos los sitios donde se puede encontrar información oceanográfica y donde existe es puntual,

por lo tanto, se hace necesario el uso de modelos numéricos para estimar el oleaje en función de información meteorológica. Normalmente para entender la transformación y efectos del oleaje es necesario propagarlo, ya sea experimental o numéricamente, desde el punto donde se cuenta con la información hasta el sitio de interés, tratando de reproducir en lo posible las condiciones reales en que se ve afectado.

Con el objeto de conocer el oleaje en una región dada, se han creado numerosos métodos para modelar la transformación

del mismo, que parten desde consideraciones simples como trenes de oleaje de pequeña amplitud a partir de frecuencias y direcciones iniciales, hasta modelos de propagación del oleaje en formas no lineales, pasando por la estimación de la transformación a partir de un espectro completo de oleaje.

En los años sesenta inició una fuerte tendencia a implementar modelos analíticos y numéricos debido al gran desarrollo tanto de hardware, como de software. En un principio, diversos autores comenzaron a adecuar procedimientos de generación de mallas con un sistema coordinado  $(x, y, z)$  para el análisis del fenómeno de refracción. Dicho sistema de mallas debía ser lo suficientemente fino para aproximar la topografía, así como manejable para no exceder las capacidades propias del hardware con el que se contaba. Todas las aproximaciones requerían una selección de profundidades representativas de cada punto de la malla para que posteriormente, y con el auxilio de algoritmos especiales, se realizara una interpolación hacia los puntos de la malla no conocidos.

Griswold (1963) trabajó con la ecuación de dispersión de pequeña amplitud para calcular la celeridad en cada punto de la malla, integrando el efecto de la profundidad; para ello, hicieron uso de una técnica de solución de profundidades y gradientes en cada punto de la malla, se propuso un incremento constante de tiempo  $\Delta t$  para que la distancia en cada paso de la interpolación decreciera conforme el oleaje se aproximara a aguas someras, y para mantener la exactitud del análisis, también calculó un espaciamiento entre ortogonales para así evaluar los coeficientes de refracción en cada punto.

Keulegan y Harrison (1970) se encargaron de construir diagramas de refracción de tsunamis y sus efectos en las costas, para lo cual, adaptaron su malla de análisis a una proyección de Mercator. Skovgård *et al.*, (1975) presentaron un análisis más sofisticado para el cálculo de la refracción del oleaje utilizando técnicas de seguimiento de rayos de oleaje, que incluyen los efectos de agudización de las alturas del oleaje debido a la fricción del fondo. La desventaja de trabajar con una técnica de seguimiento de rayos de oleaje es que dichos rayos no se adecuan a una malla uniforme de alturas y direcciones de oleaje cerca de la costa.

Noda (1974) desarrolló un modelo de refracción de oleaje a través de diferencias finitas, incluyendo efectos de corriente y asumiendo válida la irrotacionalidad del número de onda y la conservación de la energía del oleaje, la cual arrojaba direcciones de oleaje y alturas dentro de una malla. Posteriormente, Dalrymple (1988) desarrolló una versión más simple del modelo de Noda, simplificando los cálculos para obtener la dirección del oleaje incluyendo la rotura, disipación de energía y reconstitución de la ola.

En este artículo se desarrolla un modelo matemático para la evaluación de la transformación del oleaje sobre un fondo irregular y bajo la presencia de corrientes. El modelo incluye el efecto de rotura y su disipación; es especialmente válido para cuando la refracción y someramiento sean dominantes sobre los fenómenos de reflexión y difracción; por ejemplo, playas sin estructuras con o sin la presencia de corrientes; si existen estructuras, su tamaño deberá ser mucho menor que la longitud de onda y para la propagación del oleaje desde aguas profundas hasta aguas someras.

### Planteamiento teórico

Cuando el oleaje se propaga de aguas profundas hacia aguas someras sufre una serie de transformaciones, entre las que destacan: el someramiento, la refracción, la difracción y la rotura. Estos cambios se traducen en una variación de la altura de ola, la disminución de la longitud de onda y en ocasiones, cambios en la dirección de propagación. La difracción (fenómeno de cesión lateral de energía generado en las cercanías de estructuras) no es considerada en el modelo, por lo que su uso debe de ser restringido a este tipo de estudios.

El modelo de refracción del oleaje en presencia de corrientes y variaciones del fondo está basado en el concepto de irrotacionalidad del número de onda y la conservación de la acción del oleaje; con el primero, se evalúa la dirección y con el segundo, se determina la altura local del oleaje. La rotura es un suceso importante en la propagación del oleaje, por ello se ha incorporado un criterio de rotura y una función que determina su disipación hacia la costa.

### Ley de Snell

En general, la cresta de una onda se puede definir por medio de una línea que una los puntos con la misma fase. La forma más convencional de representar a un tren de ondas es a través de un armónico simple,

$$\eta = \frac{H}{2} \cos \Omega \quad (1)$$

Donde  $\Omega$  es la fase, definido como  $\Omega = kx - \sigma t$ , donde  $k$  es el vector número de onda,  $x$  indica la dirección de propagación del oleaje sobre un eje coordinado  $(x, y)$ ,  $\sigma$  la frecuencia angular y  $t$  el tiempo. La cresta se presenta cuando la fase de la onda  $\Omega = 2j\pi$ , siendo  $j$  un entero.

El vector unitario  $\mathbf{n}$  a la función escalar  $\Omega$  es inherente al vector normal  $\mathbf{N}$ , mismo que puede ser evaluado a través del gradiente de la función:

$$\mathbf{N} = \nabla \Omega = \mathbf{n} \left| \nabla \Omega \right| \quad (2)$$

Para el objetivo de este desarrollo, el operador gradiente es sólo función de las coordenadas horizontales:

$$\nabla \equiv \nabla_h = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} \quad (3)$$

El número de onda  $\mathbf{k}$ , puede ser definido como

$$\mathbf{k} = \mathbf{N} = \nabla \Omega = \mathbf{n} \left| \nabla \Omega \right| \quad (4)$$

Para la propagación sobre una dirección arbitraria en la dirección  $x$ - $y$ , se tiene que:

$$\mathbf{k} = K_x \mathbf{i} + K_y \mathbf{j} \quad \text{y} \quad (5)$$

$$k = |\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (6)$$

De la ecuación (5), el vector  $\mathbf{k}$  es el gradiente de un escalar. Si se toma el producto cruz de  $\mathbf{k}$ ,

$$\nabla \times \mathbf{k} = 0 \quad (7)$$

por identidad, el producto cruz de un gradiente es cero. Esta condición de irrotacionalidad de  $\mathbf{k}$  indica que la integral de línea

$$\int \mathbf{k} \cdot d\mathbf{l} \quad (8)$$

es independiente de la trayectoria. La integral de línea también se puede expresar como:

$$\int \nabla \Omega \cdot d\mathbf{l} = \int d\Omega \quad (9)$$

Por lo tanto, la irrotacionalidad implica que para un tiempo dado,  $\Omega(x, y, t)$  es únicamente determinada en cada posición. Sustituyendo las componentes de  $\mathbf{k}$  en la ecuación (9), se obtiene que:

$$\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

donde,

$$A = k_y = k \sin \theta \quad (11)$$

$$B = k_x = k \cos \theta \quad (12)$$

La expresión (10) es conocida con el nombre de la Ley de Snell, la cual es una ecuación parcial de primer orden que

se resuelve con el uso de una condición inicial en  $x=0$ , correspondiente al valor de la dirección de la ola incidente. Debido a que es una ecuación no lineal se debe resolver por iteraciones o por medio de una discretización.

Para el análisis de la interacción del oleaje con corrientes, se hace uso de la ecuación de dispersión que relaciona al número de onda  $k$ , con la profundidad  $h$  y la frecuencia absoluta  $\omega$  ( $\omega = 2\pi/T$ ):

$$\omega = \sigma + k \cos \theta U + k \sin \theta V \quad (13)$$

Donde  $\sigma$  es la frecuencia intrínseca,  $U$  y  $V$  son los valores promedio de las corrientes en ambas direcciones. Estas corrientes se asumen como datos y afectan a la longitud de la ola y su celeridad, la frecuencia intrínseca al tercer orden, Dalrymple (1988), se define como:

$$\sigma^2 = gk \tan h(kh + f_2 Ka) [(1 + f_1 (ka)^2 D)] \quad (14)$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad y los parámetros  $D$ ,  $f_1$  y  $f_2$  corresponden a los términos no lineales definidos por:

$$D = \frac{\cos h 4kh + 8 - 2 \tan h^2 kh}{8 \sin h^4 kh} \quad (15)$$

$$F_1 = \tan h^5 kh \quad (16)$$

$$f_2 = \left[ \frac{kh}{\sin h(kh)} \right]^4 \quad (17)$$

La relación de dispersión (ecuación 14), relaciona el número de onda con su frecuencia, la amplitud de onda  $a$  y la profundidad local  $h$ . En esto caso, se provee una corrección de un número de onda al tercer orden en aguas profundas, y para aguas someras, el valor del número de onda se aproxima al valor del que se obtuviese a través de una onda solitaria. Para ondas lineales, los términos  $f_1$  y  $f_2$  se omiten. Las funciones  $f_1$  y  $f_2$  pueden tomar valores entre la unidad y cero, respectivamente, para dar una relación de Stokes exacta; sin embargo, es conocido que la solución al primer orden es poco precisa en aguas someras.

### Acción del oleaje

En la teoría de ondas de pequeña amplitud, se asume que en la propagación de ondas las trayectorias de las partículas de agua son cerradas, es decir, éstas no transmiten masa a través del fluido sino que este tipo de ondas lo que transmiten es energía. La proporción de energía que es transferida es llamada flujo de energía,  $F$ , y para teoría lineal es la proporción del trabajo realizado en sección vertical por el fluido sobre un lado hacia el otro. La relación instantánea

del trabajo realizado por la presión dinámica,  $p_D$ , por anchura unitaria es:

$$F = F_x + F_y = \int_{-h}^{\eta} P_D \cdot u dz + \int_{-h}^{\eta} P_D \cdot v dz \quad (18)$$

El flujo de energía medio es obtenido promediando la ecuación (18) en un período

$$\bar{F} = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-h}^0 P_D \cdot \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dz dt \quad (19)$$

Seguendo el desarrollo presentado por Silva (1997):  
La presión dinámica está definida por:

$$P_D = p + \rho g z \quad (20)$$

La presión  $p$ , puede evaluarse a través de la ecuación de Bernoulli,

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p}{\rho} + gz = \frac{U^2}{2g} + \frac{V^2}{2g} \quad (21)$$

El potencial de velocidades  $\Phi$ , está definido como:

$$\Phi = -Ux - Vy + \frac{Hg \cos h k(h+z) \cos(k(x \cos \theta + y \sin \theta) + \sigma t)}{2\sigma \cos h kh} \left( 1 - \frac{Uk \cos \theta + Vk \sin \theta}{\sigma} \right) \quad (22)$$

Al primer orden, la presión dinámica y las componentes de la velocidad quedan expresadas como:

$$P_D = \frac{\rho g H \cosh k(h+z) \cos(k(x \cos \theta + y \sin \theta) + \sigma t)}{2 \cos h kh} \left( 1 - \frac{Uk \cos \theta + Vk \sin \theta}{\sigma} \right) \quad (23)$$

$$-\left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = U + V + \frac{gHk(\cos \theta + \sin \theta) \cos hk(h+z)}{2\sigma \cos hkh}$$

$$\frac{\cos(k(x \cos \theta + y \sin \theta) + \sigma t)}{\left( 1 - \frac{Uk \cos \theta + Vk \sin \theta}{\sigma} \right)} \quad (24)$$

Operando y sustituyendo las ecuaciones (23) y (24) en la ecuación (18), se obtiene

$$\bar{F} = \bar{F}_x + \bar{F}_y = \left( \frac{E(U + Cg \cos \theta)}{\sigma} \right) + \left( \frac{E(V + Cg \sin \theta)}{\sigma} \right) \quad (25)$$

Entonces, la acción del oleaje, excluyendo cualquier entrada o disipación, se puede expresar como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{E(U + Cg \cos \theta)}{\sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{E(V + Cg \sin \theta)}{\sigma} \right) = 0 \quad (26)$$

Siendo  $E$  la energía,  $C_g$  la celeridad de grupo y  $C$  la celeridad.

$$E = \frac{1}{8} \rho g H^2 \quad (27)$$

$$Cg = nC \quad (28)$$

$$n = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\sin h 2kh} \right) \quad (29)$$

En la ausencia de corrientes, la ecuación de la acción de oleaje se reduce a la ecuación de conservación de la energía de onda, y el valor de  $\sigma$  se hace constante. Definiendo  $A$  como el flujo de la acción de oleaje en la dirección  $x$  y a  $B$  como la misma cantidad en la dirección  $y$ , la ecuación (26) se puede describir

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = 0 \quad (30)$$

El criterio de rotura implementado en el modelo se verifica comparando el valor de la línea cercana calculado contra el valor dado a partir de la condición de rotura, Darlymple (1988):

$$E_b = \rho g (0.79h)^2 / 8 \quad (31)$$

Finalmente, y después de que la rotura se ha presentado, el modelo incorpora el criterio de disipación de Dally *et al.*, (1985):

$$\frac{\partial}{\partial x} (H^2 h^{1/2}) = -\frac{0.15}{h} (H^2 h^{1/2} - 0.16h^{5/2}) \quad (32)$$

### Desarrollo numérico del modelo de refracción del oleaje

Para implementar el modelo de refracción del oleaje, la batimetría de estudio se debe discretizar en una malla rectangular de dimensiones  $M \times N$ , en las direcciones  $x$  y  $y$  respectivamente. La primera describe la dirección de mar a tierra y la última la línea de costa. Las condiciones iniciales que se requieren son: período, amplitud y ángulo de incidencia del oleaje a lo largo de la primera línea de la malla,

así como el mapa de corrientes (en su caso) asociado a la batimetría proporcionada.

La solución analítica de las ecuaciones diferenciales involucra expresiones cerradas que muestran el cambio de las variables dependientes en forma continua a través del dominio. En contraste, las soluciones numéricas sólo arrojan respuestas en puntos discretos dentro del dominio, denominados puntos de la malla. En la figura 1 se muestra una sección de una malla discreta en el plano  $x$ - $y$ , se asume que el espaciamiento en la dirección  $x$  es uniforme y está dado por  $\Delta x$ , así como en el otro sentido por  $\Delta y$ . En forma general, dichos espaciamientos no son iguales y de hecho tampoco son necesariamente uniformes; sin embargo, para la solución de este problema de dinámica de fluidos es mucho más sencillo considerar igualdad y uniformidad en los espaciamientos, ya que además simplifica la programación, el almacenamiento de datos y arroja resultados más exactos.

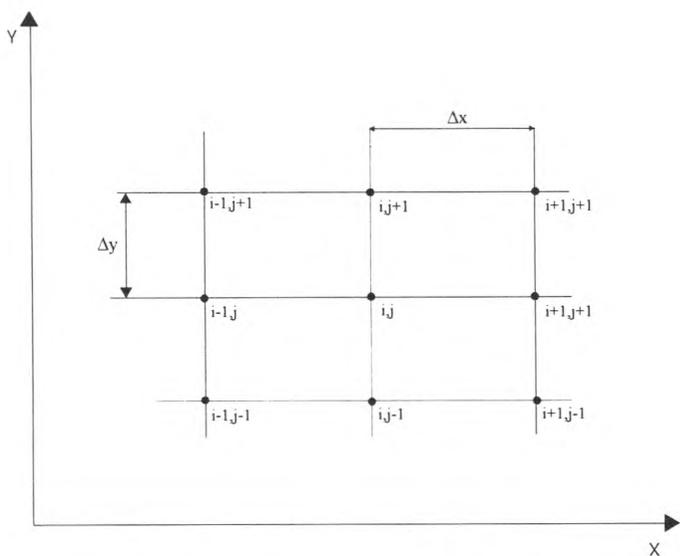


Figura 1. Puntos discretos de la malla utilizados para el cálculo

Los puntos de la malla se identifican por un índice  $i$  que corre a lo largo del eje  $x$  y un índice  $j$  que corre a lo largo del eje  $y$ . Si  $(i, j)$  en un punto  $P$ , entonces el punto inmediatamente a la derecha es  $(i+1, j)$ , el punto inmediatamente a la izquierda es  $(i-1, j)$ , el punto inmediatamente arriba es  $(i, j+1)$ , y el punto inmediatamente abajo es  $(i, j-1)$ .

El método de las diferencias finitas es muy utilizado para resolver problemas de hidrodinámica, la finalidad del método de las diferencias finitas es el de sustituir las derivadas parciales que se presentan en las ecuaciones de la dinámica de fluidos con coeficientes diferenciales algebraicos, dando así un sistema de ecuaciones algebraicas que fácilmente se puede resolver para las variables del flujo en cada punto discreto de la malla.

Un método directo y popular dentro del análisis y estudio de este tipo de fenómenos es el de Lax- Wendroff, que ha demostrado tener un comportamiento numérico estable y un bajo requerimiento de memoria de trabajo.

Dentro del programa, se optó por el manejo del método de Lax-Wendroff por ser el que más se adapta al problema físico de refracción del oleaje y hace manejable la malla de cálculo obtenida. Por otra parte, este método permite encontrar grupos de valores en cada punto del dominio a través de una transformación de la malla física a una malla computacional. Este grupo de valores corresponde para el problema de refracción de oleaje, el valor de la altura de la ola y su ángulo de incidencia, relacionados a cada punto y a una batimetría que se inserta como un archivo de datos conformables con las dimensiones de la malla computacional.

Se debe establecer una línea de datos iniciales completa en alguna frontera de la malla de cálculo para así poder comenzar el proceso de solución para todos los puntos sobrantes haciendo un barrido y tomando en cuenta las otras tres fronteras y sus diferentes comportamientos de acuerdo con el fenómeno físico.

La ecuación explícita final para  $A$  en el punto  $i, j$  de la malla es:

$$A_{i+1,j} = A_{i,j} + \frac{\Delta x}{2\Delta y} (B_{i,j+1} - B_{i,j} + B_{i+1,j} - B_{i+1,j-1}) \quad (33)$$

Las profundidades y los valores promedio de corrientes se deben proporcionar como dato en cada punto, el procedimiento establece la altura de ola y su dirección, así como la acción del oleaje en la línea de la malla en dirección  $x$ , de los datos de entrada o a partir de la *ley de Snell* en caso de existir datos para aguas profundas. Para la siguiente línea de profundidades, las condiciones de frontera en  $j=1$  se determinan. Esto debe ser iterativo para el caso en que se trabaje con los términos no lineales, debido al hecho de que es necesario conocer el valor de la altura del oleaje para calcular el número de onda; sin embargo, una altura de ola se asume en un principio y el número de onda para el punto  $(i, 1)$  se encuentra.

El ángulo de incidencia se encuentra de la condición de que  $A_{i,1}$  es constante en esta línea y luego la acción de oleaje se calcula para obtener la altura del mismo. Este procedimiento es iterado para obtener la convergencia para el punto  $(i, 1)$ . Para los puntos  $j=2, 3, \dots, N-1$  el esquema de diferencias finitas se utiliza. En cada punto  $j$  las ecuaciones de diferencias finitas y la relacionada con la *ley de Snell* se iteran hasta que se alcanza la convergencia, de nuevo debido a la dependencia del número de onda con la altura de ola y su dirección (en el caso de haber corrientes). Después de haberse encontrado la convergencia en el punto  $j$ , el siguiente punto se calculará. Cuando una línea

se acaba de calcular, se tomará la línea siguiente hasta que se haga un barrido completo de la zona de estudio.

Las condiciones de frontera laterales dentro del modelo, solamente se deben especificar en ambos lados del dominio de la malla. El lado superior de la malla se toma como  $y=0$  ( $j=1$ ) correspondiente a olas con ángulos  $0 < \theta < \pi/2$  (para oleaje con ángulos de incidencia negativos simplemente se toma una proyección simétrica hacia el otro sentido de la malla).

En el punto  $j=N$  en la frontera, se utiliza una diferencia hacia atrás. Esta ecuación es válida para fronteras de tipo transmisivas:

$$A_{i+1,j} = A_{i,j} + \frac{\Delta x}{2\Delta y} (B_{i,j} - B_{i,j-1} + B_{i+1,j} - B_{i+1,j-1}) \quad (34)$$

El ángulo de incidencia de la ola se calcula con:

$$\theta_{i,j} = \tan^{-1} \left( \frac{A_{i,j}}{B_{i,j}} \right) \quad (35)$$

### Esquemas no iterados

Un método para conocer el valor de  $A_{i+1,j}$ , en forma exacta, se puede obtener a partir de:

$$A_{i+1,j} = -b + \sqrt{b^2 - c} \quad (36)$$

donde

$$b = \frac{r(B_{i+1,j-1} - B_{i,j+1} + B_{i,j}) - A_{i,j}}{(1+r^2)} \quad (37)$$

$$c = \frac{\{(i+r^2)b\}^2 - r^2 k_{i+1,j}^2}{(i+r^2)} \quad (38)$$

$$r = \frac{\Delta x}{2\Delta y} \quad (39)$$

Para la acción del oleaje se utiliza:

$$A_{i+1,j} = \frac{A_{i,j} + rC_1}{1+r \left( \frac{V_{i+1,j} + Cg_{i+1,j} \text{sen } \theta_{i+1,j}}{U_{i+1,j} + Cg_{i+1,j} \text{cos } \theta_{i+1,j}} \right)} \quad (40)$$

$$C_1 = B_{i+1,j-1} - B_{i,j+1} + B_{i,j} \quad (41)$$

Este método es preferible que el de un esquema iterativo, ya que alcanza una exactitud de segundo orden en las diferencias y es al menos, cinco veces más rápido, lo cual es importante cuando se hace uso de computadoras personales.

### Ejemplos de aplicación

El modelo de refracción de oleaje se ha aplicado a varios casos con soluciones, analítica o experimental, conocidas. En particular, aquí se presentan los resultados de tres casos:

1. Propagación de oleaje sobre una batimetría recta y paralela.
2. Comparación con los resultados de laboratorio publicados por Berkhoff en 1982.
3. Reproducción numérica de un ensayo idealizado propuesto por Noda en 1974. Se compararán los resultados con los obtenidos del modelo original.

#### Caso 1. Batimetría recta y paralela

En este caso, se muestra un ejemplo clásico de una modelación para observar el fenómeno de refracción y asomeramiento a través del modelo propuesto.

Se trabajó con una batimetría recta y paralela con una pendiente de 5% sobre un dominio de 200 m de longitud por 120 m de anchura con una profundidad máxima de 10 m en la zona de arribo del oleaje; para fines de comparación se consideraron las siguientes condiciones: período  $T=12$  s, amplitud del oleaje incidente  $a = 2.1$  m con ángulos de incidencia de 15°, 30°, 45°, 50° y 60° (Fig. 2).

En la figura 2, se puede observar el efecto combinado del asomeramiento y la refracción, el cual se manifiesta en un aumento en la altura del oleaje a medida que el ángulo de incidencia se incrementa. Para ángulos de incidencia muy pequeños, la altura del oleaje se amplifica considerablemente en la parte izquierda del dominio de cálculo, este aumento se mueve hacia el centro conforme el ángulo de incidencia tiende a ser normal a las líneas batimétricas, siendo su variación mas suave. A medida que el oleaje progresa, se presenta el efecto de refracción, el ángulo comienza a alinearse hasta llegar a ser normal al fondo y eventualmente rompe cuando la profundidad es tal que las ondas son inestables (Fig. 3).

El fenómeno de refracción se puede observar con mayor claridad a través de una representación gráfica de un corte longitudinal a la batimetría; por ejemplo, en el centro del dominio de cálculo, este perfil del oleaje muestra un aumento en la altura del mismo en el primer tercio del dominio hasta llegar al punto donde sufre una disminución, para posteriormente romper y con esto perder su energía (Fig. 4).

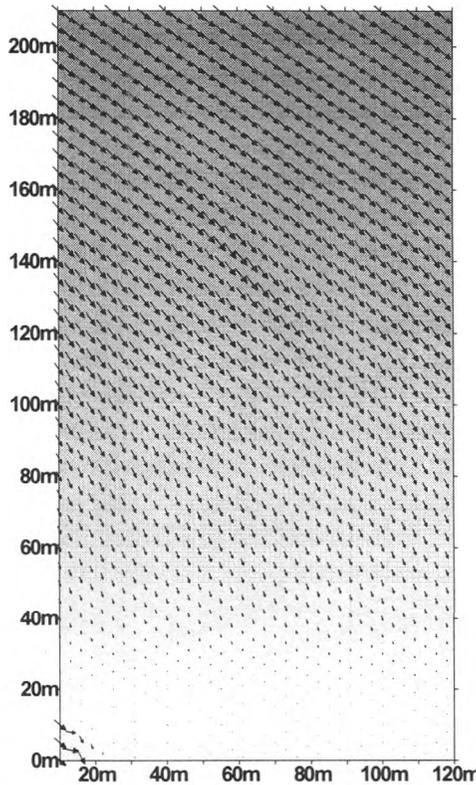


Figura 2. Resultados para oleaje incidente de  $50^\circ$ . Las flechas muestran la magnitud y dirección del oleaje en cada punto de dominio

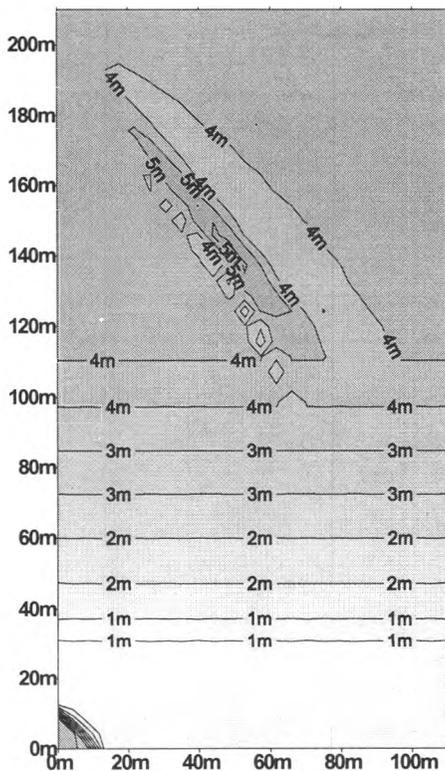


Figura 3. Contornos de alturas de oleaje para un ángulo de incidencia de  $50^\circ$ . Se muestra el asomeramiento y la disipación de energía por fondo

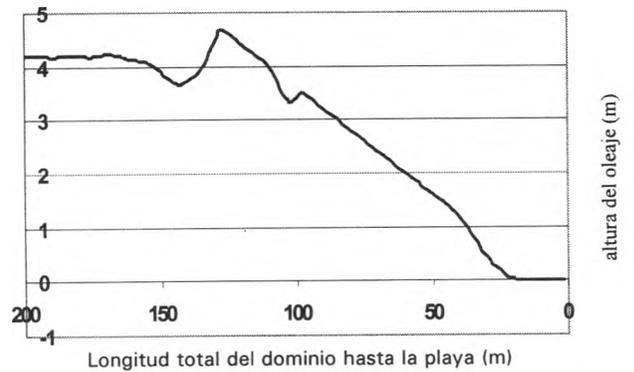


Figura 4. Perfil central del dominio de cálculo representando el fenómeno de asomeramiento del oleaje incidente para un ángulo de llegada de  $45^\circ$

## Caso 2. Modelo experimental de Berkhoff

Se comparan los resultados experimentales de Berkhoff et al., (1982) con los resultados numéricos del modelo de propagación. El modelo consta de una batimetría con un bajo o "shoal" elíptico situado sobre un fondo plano con pendiente del 2%. En el contorno inicial de donde proviene el oleaje, con una profundidad de 0.45 m y el contorno final de ensayo una playa, de modo que la energía propagada se disipa casi en su totalidad por el proceso de rotura del oleaje. En la figura 5 se presenta la batimetría utilizada.

Esta prueba se eligió por las siguientes razones:

- Se cuenta con un completo conjunto de medidas experimentales rigurosamente controladas en el laboratorio, Berkhoff et al., (1982).

- No obstante que el modelo de Berkhoff fue diseñado para estudiar los efectos de difracción, en algunas zonas los resultados pueden servir para estudiar los efectos de refracción.

- Se prueba la eficiencia del modelo propuesto para reproducir la transformación del oleaje en zonas dominadas por los efectos de refracción-someramiento-rotura.

El dominio numérico consistió en una malla rectangular de dimensiones 25m x 20 m según el eje x y el eje y, respectivamente. La línea máxima pendiente del plano inclinado forma un ángulo de  $20^\circ$  con el eje x. Los espaciamientos  $\Delta x$  y  $\Delta y$  se tomaron iguales  $\Delta x = \Delta y = 0.25$  m con 101 x 81 nodos de cálculo en x y y, respectivamente. Las condiciones iniciales del oleaje incidente fueron las mismas que en el ensayo de Berkhoff  $H_0 = 0.0464$  m,  $T = 1$  s y  $\theta = 0^\circ$ , respecto al eje x de la malla de cálculo (Fig. 6).

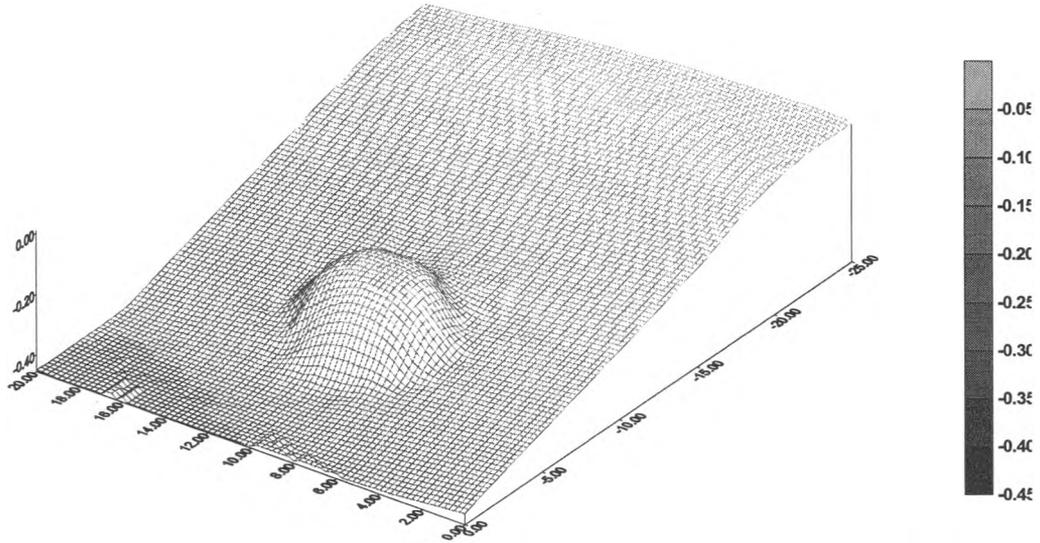


Figura 5. Batimetría de ensayo utilizada por Berkhoff (1982). Perspectiva 3D

Los resultados de la modelación numérica se muestran gráficamente en la figura 7. En esta figura se puede observar cómo se agudiza la ola en el área difractada, mientras que en toda la zona restante se tiene un comportamiento normal al que se tendría con un oleaje refractado en su totalidad (las líneas en la gráfica dividen las dos zonas).

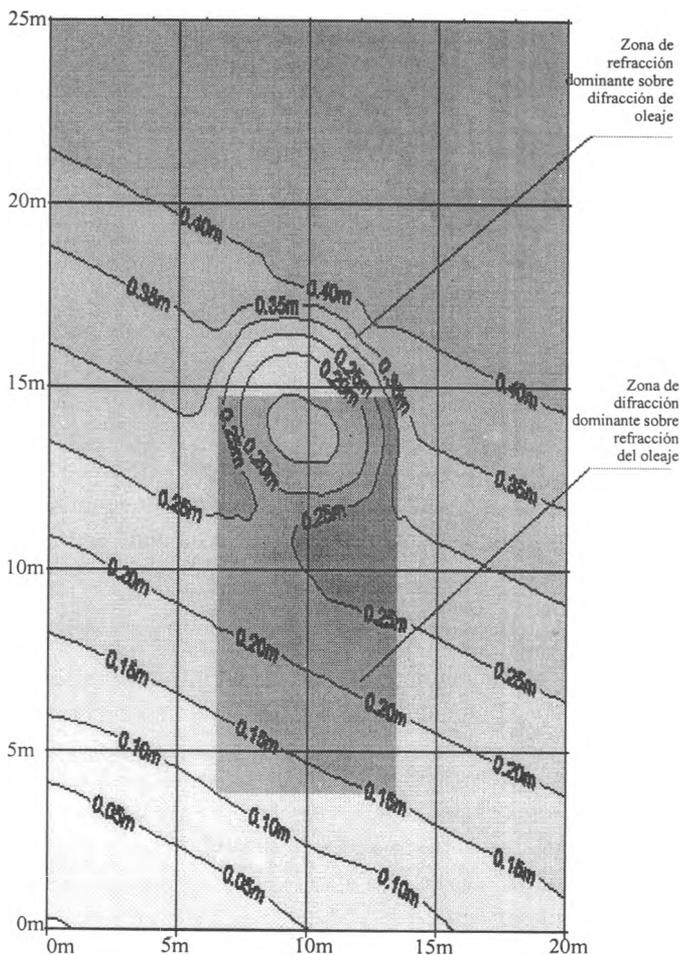


Figura 6. Zonas de dominio de los efectos principales de transformación del oleaje

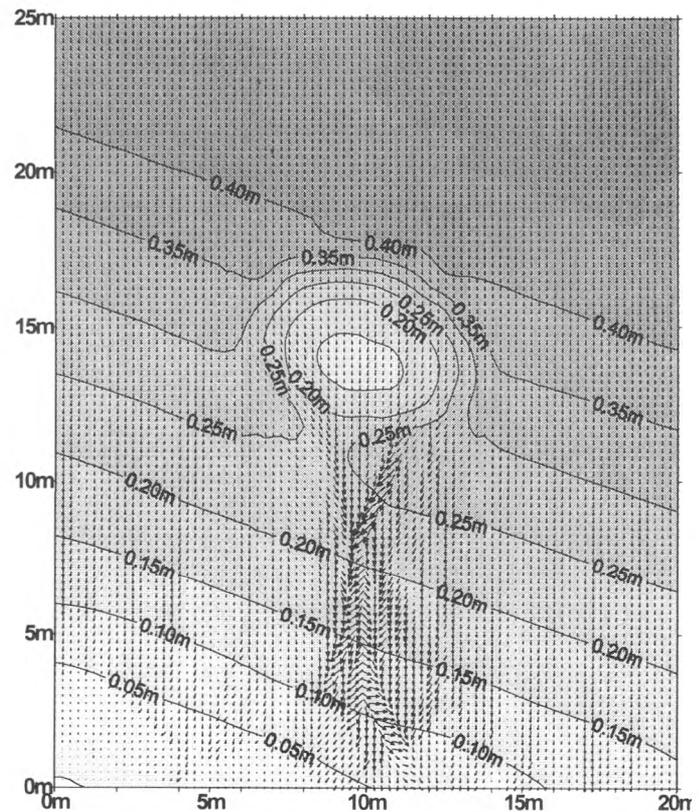


Figura 7. Modelo de Berkhoff realizado con el modelo computacional

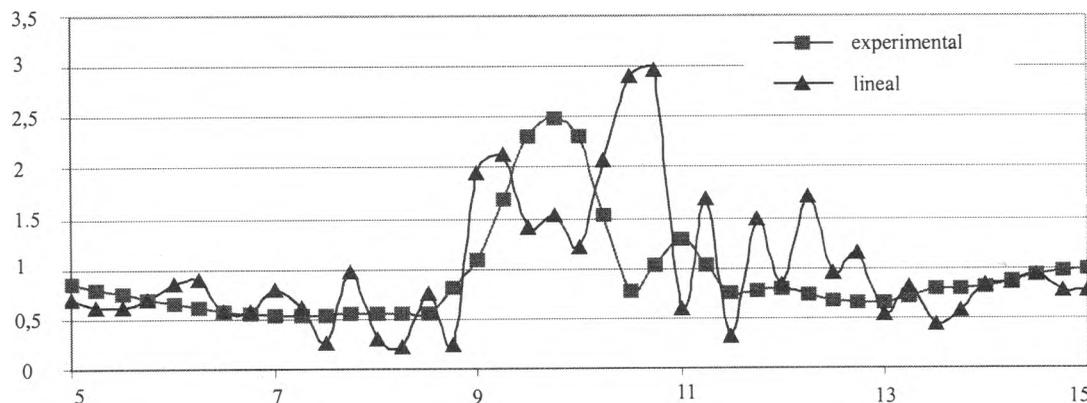


Figura 8. Comparación del resultado experimental y numérico para la sección de medición experimental, se comienza a estabilizar a los lados pero se presenta una agudización extrema del oleaje en la zona de difracción dominante

En la figura 8 se presenta una comparación entre los resultados experimentales y numéricos en una sección transversal al bajo o “shoal”. De esta figura, se observa que el modelo no reproduce adecuadamente la transformación del oleaje sobre el bajo; sin embargo, en las zonas dominadas por los efectos de refracción-someramiento, los resultados entre ambos modelos son muy semejantes.

### Caso 3. Batimetría idealizada. Noda (1974)

En el año de 1974, Noda utilizó una batimetría matemáticamente idealizada para examinar el fenómeno de refracción del oleaje con un análisis lineal. La batimetría se generó con la siguiente función:

$$h(x, y) = 0.025 \left\{ 1 + 20 \exp \left[ -3 \left( \frac{x}{20} \right)^{1/3} \sin^{10} \left( \frac{\pi y}{80} \right) \right] \right\}$$

La ecuación anterior representa una playa plana con la presencia de dos canales localizados a 80 m uno de otro. El período de ola para la prueba es de  $T=4$  s, el ángulo de incidencia para aguas profundas es de  $-37^\circ$ , y la altura de ola en aguas profundas es de 1.0 m. La figura 9 ilustra la transformación del oleaje que se propaga sobre la batimetría en cuestión en cada punto de la malla, la longitud de los vectores o flechas representa la magnitud y la dirección de la ola. En esta figura se observa que existe una fuerte tendencia a aumentar la altura del oleaje en las áreas en donde se encuentran los canales de la batimetría, presentándose una gran divergencia de la energía del oleaje lejos de los canales.

Finalmente, se muestra en las figuras 10 y 11 una comparación del resultado original de Noda con el obtenido por el programa de refracción del oleaje. Este arrojó resultados muy parecidos, de hecho, las diferencias que se obtuvieron son debido a la técnica de interpolación utilizada por el programa que se utilizó para este fin. Los puntos en la malla de la batimetría son levemente alterados al utilizar una interpolación específica comparada con otra.

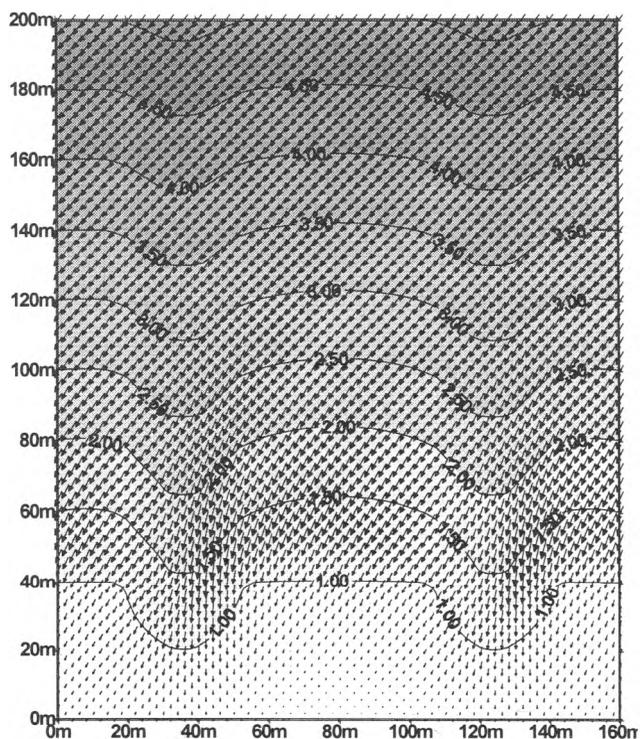


Figura 9. Resultados gráficos del experimento de Noda modelado por el programa

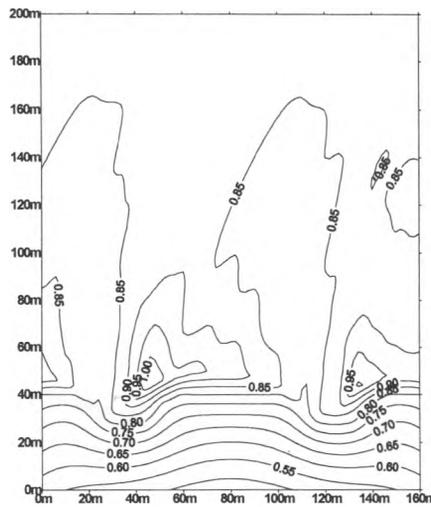


Figura 10. Representación gráfica de las líneas de iso, altura de ola para los datos obtenidos por el programa

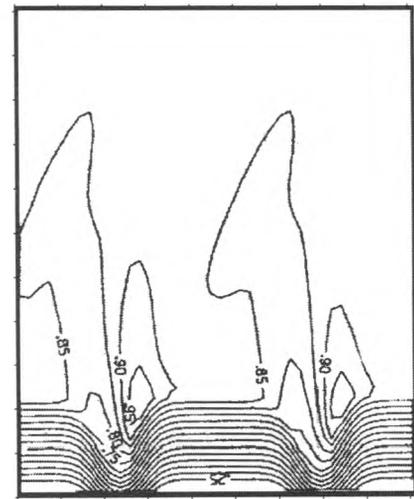


Figura 11. Representación gráfica de las líneas de iso, altura de ola para los datos obtenidos por Noda (1974)

## Conclusiones

Basados en leyes físicas y algoritmos matemáticos, se desarrolló un modelo numérico para el estudio de la transformación del oleaje por cambios en el fondo marino y la presencia de corrientes.

De los resultados numéricos, se desprende que:

1. La teoría lineal de ondas o teoría de Airy es adecuada para estudiar el oleaje que incide y se propaga desde aguas profundas a aguas someras.
2. Las diferencias encontradas entre los resultados numéricos obtenidos con un modelo lineal y otro no lineal, no justifican el esfuerzo de cálculo.
3. Para los casos de refracción, asomeramiento y rotura, el modelo propuesto reproduce razonablemente bien los resultados analíticos y experimentales de otros autores.
4. El modelo propuesto no es adecuado para el estudio de la difracción y reflexión generada por la presencia de estructuras.
5. El modelo desarrollado aquí es sencillo, de fácil programación y más eficiente numéricamente que aquellos que involucran el efecto de la difracción.

## Referencias

- Berkhoff J.C.W., Booij N. y Radder A.C. (1982). *Verification of Numerical Wave Propagation Models for Simple Harmonic Linear Water Waves*. Coastal Engineering.
- Dally W.R., R.G. (1985). Wave Height Variation Across Beaches of Arbitrary Profile. *Journal Geophysical Research*, 90, C6.
- Dalrymple R.A. (1988). Model for Refraction on Water Waves. *Journal of Waterway. Coastal and Ocean Engineering*, Vol. 114, No. 4.
- Griswold G.M. (1963). Numerical Calculation of Wave-Refraction. *Journal of Geophysical Research*. 68(6), 1715-1723.
- Keulegan G.H. y Harrison J. (1970). Tsunami Refraction Diagrams by Digital Computer. *Journal of Waterway Harbours*, Vol. 96, No. WW2, 213-233.
- Noda E.K. (1974). Wave - Induced Nearshore Circulation. *Journal of Geophysical Research*. 79(27), 4097-4106.
- Silva R. (1997). *Apuntes del curso: Hidráulica marítima*. División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, UNAM.
- Skovgård O., Johnsson I. y Bertelsen J. (1975). Computation of Wave Heights Due to Refraction and Friction. *Journal of Waterway Harbours*, Vol. 101, No. WW1.

## Semblanza de los autores

**Rodolfo Silva-Casarín.** Egresado como ingeniero civil de la ENEP Acatlán (1983-88), obtuvo su maestría en administración de empresas en 1990, en la Universidad Chapultepec. Es maestro en ingeniería oceanográfica (1990-92) y doctor en ingeniería de caminos canales y puertos de la Universidad de Cantabria, España (1992-95). Actualmente es investigador titular del Instituto de Ingeniería y profesor de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM.

**Gabriel Díaz-Hernández.** Obtuvo el título como ingeniero civil en el año 2000 en la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Es becario del Instituto de Ingeniería desde 1998, y actualmente también cursa la maestría en hidráulica en la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM.