Ingeniería Investigación y Tecnología, ISSN 2594-0732, II.1, 35-40, 2001
(artículo arbitrado)
DOI: http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2001.02n1.004

Planteamiento sistemático de las ecuaciones de estado de un sistema físico. Forma matricial y su solución

J. Raull-Martín
Departamento de Ingeniería Eléctrica de Potencia
Facultad de Ingeniería, UNAM

(recibido: abril de 2000; aceptado: julio de 2000)

Resumen

Este artículo trata de sistematizar el planteamiento de las ecuaciones de estado para su fácil manipulación en el modelado de cualquier tipo de sistema físico (eléctrico, mecánico, híbrido, etc.). Para ello, se describen algunos conceptos de topología de redes que simplifican el proceso de modelado. Así también, se plantean todas las ecuaciones de corriente y voltaje derivadas de la aplicación de las leyes de Kirchhoff. Por último, se presenta un ejemplo en donde se obtiene la solución del estado libre, lo que representa la parte importante de la solución total.

Descriptores: ecuaciones de estado, modelado de sistemas físicos, topología de redes, leyes de Kirchhoff.

Abstract

It has been intended to systematize the proposal of the state equations for an easier handling during the modeling of any sort of physical systems (electrical, mechanical, hybrid, etc.). For this purpose, a description is made of some concepts dealing with network topology that simplify the modeling process. In addition, the current and voltage equations derived from the application of Kirchhoff's laws are also outlined. Finally, an example is presented to obtain the solution of the free state that represents the important part of the total solution.

Keywords: state equations, modeling of physical systems, network topology, Kirchhoff's laws .

Introducción

El presente trabajo está enfocado a mostrar la secuencia de operaciones para llegar al planteamiento de las ecuaciones de estado en una forma que simplifica y facilita la obtención de las ecuaciones finales, esto mediante el análisis de los diferentes circuitos.

Se indican los pasos para llegar al resultado final, así como el cálculo de los diferentes voltajes y corrientes en cada uno de los elementos.

Definición

Se designa con el nombre de ecuaciones de estado, a un conjunto de las mismas que expresan el estado energético de un sistema físico, en función de las corrientes en las inductancias y de los voltajes en los capacitores.

Forma simple para plantear las ecuaciones de estado

Las ecuaciones de estado que modelan un sistema físico, se pueden presentar en forma concreta de la siguiente manera:

$$X] = [A]\,Xo] + [B]U]$$

En donde:

[A] y [B] son matrices que dependen de los parámetros y de la topología del sistema.
Xo] vector que representa el estado energético del circuito, dado en función de las condiciones iniciales.
U] vector de excitación del circuito, formado por las fuentes de energía que activan el sistema.
X] derivada del vector de estado.

DOI: http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2001.02n1.004

El primer término del segundo miembro de la ecuación de estado (1) representa el planteamiento de la solución libre, y el segundo término, el planteamiento de la solución forzada cuando se tienen condiciones iniciales nulas.

Resumiendo, todo el segundo miembro plantea la solución total de la ecuación de estado, o sea, la suma del estado libre más el estado forzado.

La ecuación de estado se plantea en función de las corrientes que fluyen en los inductores y de los voltajes en los capacitores exclusivamente. Las demás magnitudes se representan en función de las anteriores, o bien, en función de las magnitudes análogas si se manejan otros sistemas que no sean eléctricos; por ejemplo, velocidades de las masas o fuerzas almacenadas en los resortes, si el sistema es mecánico.

Para establecer las ecuaciones de estado conviene partir de algunos conceptos sobre topología de redes. Esta materia estudia la relación de los elementos de un circuito desde un punto de vista puramente geométrico.

Previo a las ecuaciones de estado, a continuación se anotan las definiciones sobre los conceptos de topología utilizados en el presente artículo.

Nodo: es el punto de un circuito eléctrico donde se unen más de dos ramas.

Rama: son los elementos eléctricos representados por una raya, éstos se conectan entre dos nodos.

Malla: es un conjunto de ramas que forman un circuito cerrado.

Gráfica: describe las propiedades geométricas de una red, formando un esqueleto de la misma. Se obtiene como resultado de trazar una línea en lugar de cada uno de los elementos físicos de un circuito. Cada rama de la gráfica debe tener indicadas las polaridades de los voltajes y los sentidos de las corrientes.

Árbol: es una subgráfica que resulta de unir todos los nodos sin formar ninguna trayectoria cerrada. De una gráfica se pueden trazar diversos árboles diferentes.

Eslabón: es cada rama que al ser trazada cierra una malla. En cada gráfica se forman tantas mallas como eslabones que requieran ser trazados, de acuerdo con la siguiente expresión:

$$E = r - (n-1)$$

En donde:

E= número de eslabones o mallas de una gráfica.

n= número de nodos.

r= número de ramas totales.

Secciones de corte fundamentales

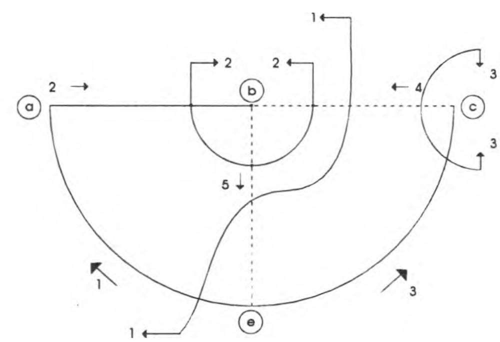
Son secciones cerradas asociadas a las diferentes ramas del árbol considerado, de tal manera que cada sección de corte atraviese una sola rama del mismo. Habrá tantas secciones de corte fundamentales como ramas tenga el árbol.

En cada sección de corte se aplica la ley de Kirchhoff de las corrientes, o sea, la suma de corrientes que incidan simultáneamente en una sección cerrada (de corte), es igual a cero.

El número de la sección de corte lo fija el número de la rama de árbol que corta, y el sentido positivo de la corriente lo fija exclusivamente el sentido de la rama del árbol.

1,2 y 3 son ramas de árbol (línea gruesa)

4 y 5 son eslabones (línea punteada)



Por lo tanto, las ecuaciones de las secciones de corte fundamentales son:

$$\Sigma I_{1-1} = 0 \quad \text{o sea} \quad i_1 + i_4 - i_5 = 0$$

$$\Sigma I_{2-2} = 0 \quad \text{o sea} \quad i_2 + i_4 - i_5 = 0$$

$$\Sigma I_{3-3} = 0 \quad \text{o sea} \quad i_3 - i_4 = 0$$

Mallas fundamentales

Son mallas asociadas a los eslabones, por lo que cada malla es cerrada al trazar el eslabón correspondiente, es decir, habrá tantas mallas fundamentales como eslabones tenga la gráfica.

En cada malla se aplica la ley de Kirchhoff de voltajes, en donde la suma algebraica de voltajes que se miden simultáneamente a lo largo de una malla cerrada, es igual a cero.

El número de la malla lo fija el número del eslabón que cierra la misma, y la polaridad positiva del voltaje la fija la polaridad del eslabón que cierra la malla.

En la gráfica anterior, las ecuaciones de las mallas fundamentales son:

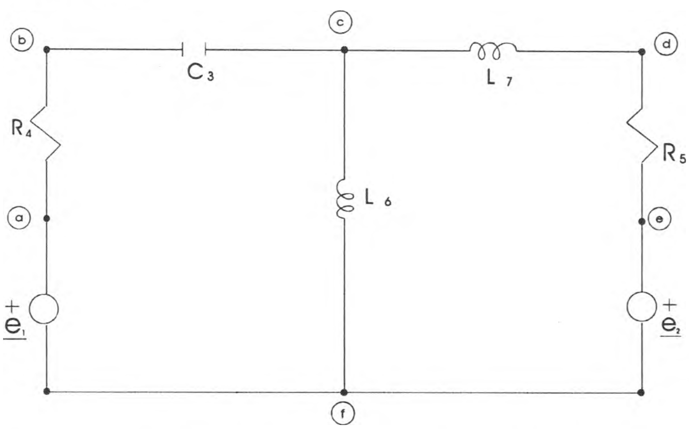
$$\Sigma V_{abe} = 0 \quad \text{o sea} \quad v_1 + v_2 + v_5 = 0$$

$$\Sigma V_{abce} = 0 \quad \text{o sea} \quad -v_1 - v_2 + v_3 + v_4 = 0$$

DOI: http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2001.02n1.004

Forma sistemática de plantear las ecuaciones de estado

A continuación se muestra un ejemplo para ilustrar la forma sistemática de plantear las ecuaciones de estado. Sea el circuito:



del cual trazamos una gráfica formada por el árbol normal y los eslabones correspondientes. El árbol normal y sus ramas deben trazarse teniendo cuidado de no cerrar ninguna malla de acuerdo con el orden siguiente:

1) Se trazan en orden numérico progresivo las ramas correspondientes a las fuentes de voltaje (ramas 1 y 2 en el circuito) con el sentido cualquiera que se haya prefijado. Ahora, se trazan las ramas correspondientes a los capacitores (rama 3). Después siguen las ramas de las resistencias (ramas 4 y 5). Finalmente, si se pudiera trazar alguna rama más, se trazarían de acuerdo a las inductancias (no es el caso de este ejemplo).

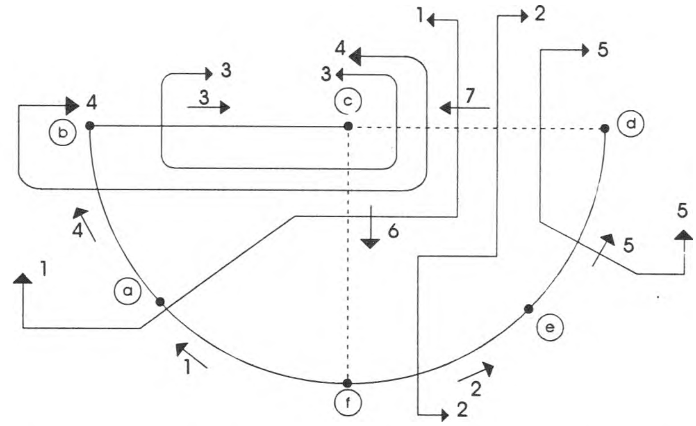
2) Para el trazo de los eslabones, se debe seguir el siguiente orden: primero, se trazan los eslabones correspondientes a las fuentes de corriente (en el ejemplo no hay fuentes de corriente). Después, se trazan las correspondientes a las inductancias (eslabones 6 y 7) si se pudieran trazar más (no es este el caso) se trazarían las resistencias y por último las capacitancias, dando a todos los eslabones una numeración progresiva.

*Las ramas del árbol se trazan con línea gruesa o doble.

* Los eslabones se trazan con línea delgada o punteada.

Los sentidos de las corrientes se pueden fijar en forma arbitraria, en la inteligencia de que al resolver las ecuaciones, si las magnitudes obtenidas son positivas, los sentidos prefijados son los correctos, y si las magnitudes son negativas, se deben cambiar los sentidos en las ramas o eslabones correspondientes.

De acuerdo con lo anterior, la gráfica normal se traza de la siguiente forma:



3) El paso siguiente consiste en escribir todas las ecuaciones de la ley de Kirchhoff de corrientes, las cuales son tantas como el número de secciones de corte fundamentales, es decir, habrá una sección de corte por cada rama de árbol. Se formarán 5 en total como se indica en la figura anterior. Las ecuaciones serán:

$$\begin{array}{ll} \Sigma I_{1-1}=0 & i_1-i_6+i_7=0 \\ \Sigma I_{2-2}=0 & i_2-i_7=0 \\ \Sigma I_{3-3}=0 & i_3-i_6+i_7=0 \\ \Sigma I_{4-4}=0 & i_4-i_6+i_7=0 \\ \Sigma I_{5-5}=0 & i_5-i_7=0 \end{array}$$

Ordenando las ecuaciones para que en el primer miembro aparezcan en forma progresiva las corrientes que fluyen por las ramas del árbol normal.

$$\left.\begin{array}{l} i_1=i_6-i_7 \\ i_2=i_7 \\ i_3=i_6-i_7 \\ i_4=i_6-i_7 \\ i_5=i_7 \end{array}\right\} A$$

4) Utilizando la segunda ley de Kirchhoff, las ecuaciones fundamentales de malla en este caso, son dos:

$$\begin{array}{ll} \Sigma V_{abcf}=0 & v_6+v_1+v_4+v_3=0 \\ \Sigma V_{abcdef}=0 & v_7-v_3-v_4-v_1+v_2+v_5=0 \end{array}$$

Al ordenar las ecuaciones para que en el primer miembro aparezcan en forma progresiva los voltajes en los eslabones:

$$V_6=-v_1-v_3-v_4$$
$$V_7=v_1-v_2+v_3+v_4-v_5$$

O sea

$$\left.\begin{array}{l} V_6=-e_1-v_3-v_4 \\ V_7=e_1-e_2+v_3+v_4-v_5 \end{array}\right\} B$$

DOI: http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2001.02n1.004

5) Utilizar la expresión i=c dv/dt para sustituir las corrientes de los capacitores instalados en las ramas del árbol y la expresión v=L di/dt para sustituir los voltajes de los inductores instalados en los eslabones.

Sustituyendo en las ecuaciones (A) y (B) se obtienen las siguientes expresiones (C).

$$\left.\begin{aligned} C_3\frac{dV_3}{dt} &= i_6 - i_7 \\ L_6\frac{di_6}{dt} &= -v_3 - v_4 - e_1 \\ L_7\frac{di_7}{dt} &= v_3 + v_4 - v_5 + e_1 - e_2 \end{aligned}\right\} C$$

De las ecuaciones (C) se desprenden las variables de estado, que en este caso son:

$$V_3 \qquad i_6 \qquad i_7$$

y las que no son variables de estado que son todas las demás variables de las ecuaciones (C), y que en el ejemplo son:

$$v_4 \text{ y } v_5$$

6) Utilizando la ley de Ohm, se obtienen las variables que no eran de estado (v_4 y v_5), en función de las variables de estado, y se sustituyen en las ecuaciones (C), a saber:

$$V_4 = R_4 i_4$$

pero en las ecuaciones (A) $i_4 = i_6 - i_7$ que son variables de estado, por lo que:

$$V_4 = R_4(i_6 - i_7) = R_4 i_6 - R_4 i_7$$

por otro lado, de las ecuaciones (A)

$$V_5 = R_5 i_5 = R_5 i_7$$

7) Sustituyendo las variables de estado que faltaban en el conjunto (C), se obtiene:

$$C_3\frac{dV_3}{dt} = i_6 - i_7$$

$$L_6\frac{di_6}{dt} = -v_3 - R_4 i_6 + R_4 i_7 - e_1$$

$$L_7\frac{di_7}{dt} = v_3 + R_4 i_6 - R_4 i_7 - R_5 i_7 - e_1 - e_2$$

Dividiendo cada ecuación entre el coeficiente correspondiente de cada derivada y ordenando las variables, se tiene:

$$\frac{dv_3}{dt} = \frac{1}{C_3} i_6 - \frac{1}{C_3} i_7$$

$$\frac{di_6}{dt} = -\frac{R_4}{L_6} i_6 + \frac{R_4}{L_6} i_7 - \frac{1}{L_6} v_3 - \frac{1}{L_6} e_1$$

$$\frac{di_7}{dt} = \frac{R_4}{L_7} i_6 - \left(\frac{R_4 + R_5}{L_7}\right) i_7 + \frac{1}{L_7} v_3 + \frac{1}{L_7} e_1 - \frac{1}{L_7} e_2$$

Ecuaciones que pasadas a la forma matricial, finalmente quedan planteadas así:

$$\begin{bmatrix} \frac{dv_3}{dt} \\ \frac{di_6}{dt} \\ \frac{di_7}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c_3} & -\frac{1}{c_3} \\ -\frac{1}{L_6} & -\frac{R_4}{L_6} & \frac{R_4}{L_6} \\ \frac{1}{L_7} & \frac{R_4}{L_7} & -\frac{R_4 + R_5}{L_7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ i_6 \\ i_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_6} & 0 \\ \frac{1}{L_7} & -\frac{1}{L_7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

Solución de las ecuaciones de estado

A continuación se muestra un ejemplo sencillo del proceso para la solución de las ecuaciones de estado.

La ecuación que resuelve las ecuaciones de estado se presenta en la siguiente forma resumida:

$$x] = e^{[A]t}.Xo] + \int_{to}^{t} e^{[A]t}.[B]U]d$$

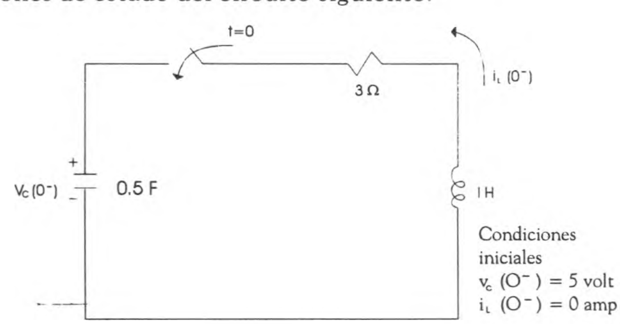
En donde:

El primer término es la respuesta del estado libre.

El segundo término es la respuesta del estado forzado.

La suma de los dos términos es la respuesta total.

Ejemplo: resolver y plantear en forma breve las ecuaciones de estado del circuito siguiente:



DOI: http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2001.02n1.004

Como el circuito no tiene fuentes generadoras, la solución que se obtenga es la respuesta del estado libre.

O sea:

$$X] = e^{[A]t}.Xo]$$

Para plantear las ecuaciones de estado en este caso, se parte de que es un circuito serie con las siguientes igualdades:

$$i_L = i_R = i_c = c\frac{dv_c}{dt} \quad (1)$$

$$V_L + v_R + v_c = 0 \quad (2)$$

Dejando las corrientes en función de i_L y los voltajes en función de v_c que son las dos variables de estado para este caso.

sustituyendo:

$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L + v_c = 0 \quad (3)$$

dejando sola a la derivada de la ecuación (3) y (1)

$$\left.\begin{array}{l|l} \dfrac{di_L}{dt} = -\dfrac{R}{L}i_L - \dfrac{1}{L}v_c & \dfrac{di_L}{dt} = -3i_L - v_c \\ \dfrac{dv_c}{dt} = \dfrac{1}{c}i_L & \dfrac{dv_c}{dt} = 2i_L \end{array}\right\} \quad (4)$$

cambiando las ecuaciones (4) a la forma matricial se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{di_L}{dt} \\ \dfrac{dv_c}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_c \end{bmatrix}$$

Para obtener la matriz de transición $e^{[A]t}$ de la ecuación de estado lograda, primero se obtiene la ecuación característica restándole un valor λ a cada elemento de la diagonal principal de la matriz [A] e igualando a cero el determinante resultante, o sea:

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-3-\lambda)\ (-\lambda) - (-1x2) = 0$$
$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$
$$(\lambda_1 + 1)\ (\lambda_2 + 2) = 0$$

Es decir, las raices de la ecuación característica son:

$$\lambda 1 = -1$$
$$\lambda 2 = -2$$

Los valores λ son las frecuencias natrurales (2 para el ejemplo) y sus recíprocos son las dos constantes de tiempo.

En su forma general, la obtención de la matriz de transición se hace a partir de la expresión:

$$e[^{[A]t} = \sum_{K=0}^{n-1} \alpha K^{[A]K}$$

O sea

$$e^{[A]t} = \alpha\ o\ [I] + \alpha_1[A] + \alpha_2[A]^2 + \alpha_3[A]^3 + ...$$

en la cual el número de términos depende del grado de la ecuación característica. En el caso del ejemplo con dos raices, la expresión utilizada para obtener la matriz de transición de la ecuación de estado obtenida es:

$$e^{[A]t} = \alpha_0[I] + \alpha_1[A]$$

En donde:

α_0 y α_1 son dos constantes.
[I] es la matriz unitaria.
[A] es la matriz de los parámetros en estado libre.

Utilizando el teorema de Cayley-Hamiltton, se sustituyen en la ecuación (5) las raices de la ecuación característica, lo que genera para nuestro caso, un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (α_0 y α_1) a saber:

$$e\lambda^{1t} = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_1$$
$$e\lambda^{2t} = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_2$$

sustituyendo los valores de λ las ecuaciones quedan:

$$e^{-t} = \alpha_0 - \alpha_1$$
$$e^{-2t} = \alpha_0 - 2\alpha_1$$

cuya solución es:

$$\alpha_0 = 2e^{-t} - e^{-2t}$$
$$\alpha_1 = e^{-t} - e^{-2t}$$

DOI: http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2001.02n1.004

sustituyendo estos valores en la expresión (5)

$$e^{[A]t} = (2e^{-t} - e^{-2t})\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + (e^{-t} - e^{-2t})\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}2e^{-t} - e^{-2t} & 0\\ 0 & 2e^{-t} - e^{-2t}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-3e^{-t} + 3e^{-2t} & -e^{-t} + e^{-2t}\\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & 0\end{bmatrix}$$

$$e^{[A]t} = \begin{bmatrix}-e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + e^{-2t}\\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t}\end{bmatrix}$$

Finalmente, la solución

$$X] = e^{[A]t} . X_0]$$

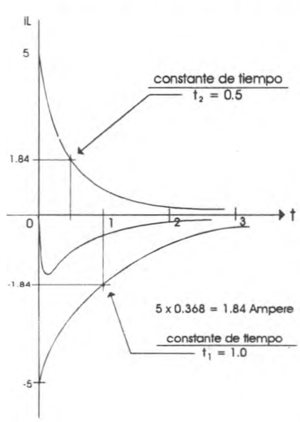
o sea:

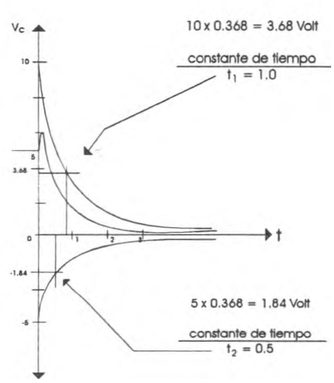
$$\begin{bmatrix}i_L(t)\\ v_c(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + e^{-2t}\\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_L(0^-)\\ v_c(0^-)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}i_L(t)\\ v_c(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + e^{-2t}\\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 5\end{bmatrix}$$

$$i_L(t) = -5e^{-t} + 5e^{-2t}$$
$$V_c(t) = 10e^{-t} - 5e^{-2t}$$

Las frecuencias naturales son: $f_1 = 1$ y $f_2 = 2$ Hertz.
Las constantes de tiempo son: $t_1 = 1$ seg y $t_2 = 0.5$ seg.
Las soluciones gráficas son:





Se define la constante de tiempo (t_1 y t_2) como el tiempo que tarda una función en pasar del 100% de su valor inicial al 36.8% del mismo.

Conclusiones

A partir de lo expuesto anteriormente, se puede concluir la secuencia de actividades para el planteamiento y solución de las ecuaciones de estado.

Los puntos principales son:

1. Recordar algunos conceptos de topología de redes.
2. Las ecuaciones matriciales obtenidas, se presentan en la siguiente forma resumida.

$$\dot{X}] = [A]\ X_0] + [B]\ U]$$

3. A partir del diagrama analógico correspondiente, se traza el árbol normal, se plantean las ecuaciones de Kirchhoff de corriente en las secciones de corte y de voltaje en las mallas.

A continuación, se sustituyen las ramas de capacitores por la expresión:

$$i_c = C\frac{dv_c}{dt}$$

y las inductancias en los eslabones por

$$v_l = L\frac{di_L}{dt}$$

De las derivadas se obtienen las variables de estado, las variables restantes que no son variables de estado, se obtienen como variables de estado a partir de la ley de Ohm.

Con todos los elementos dados en función de las variables de estado, se ordenan las ecuaciones y se pasan éstas a la forma matricial.

Finalmente, se presenta un ejemplo sencillo para la solución de un sistema en estado libre, mediante la utilización del teorema de Cayley-Hamiltton.

Bibliografía recomendada

Rodríguez-Ramírez F. *Dinámica de sistemas, apuntes de la materia: Sistemas eléctricos*. Trillas. México.

Semblanza del autor

José Raull-Martín. Egresó de la Facultad de Ingeniería, UNAM en 1953 como mecánico electricista. Ahora, con más de treinta años de experiencia en diseño y construcción de subestaciones eléctricas en la Compañía de Luz y Fuerza del Centro, fue nombrado representante ante el CCONNIE para la elaboración de normas nacionales en las ~~áreas~~ de tableros de alta tensión, cables de control y nomenclatura de términos técnicos. Desde 1965 ha sido catedrático en la Facultad de Ingeniería, UNAM y fue jefe del Departamento de Ingeniería Eléctrica en la misma institución. Es autor de la publicación "Diseño de subestaciones eléctricas", editado por Mac Graw Hill.