



La forma diferencial de las ecuaciones básicas del flujo unidimensional en canales

G. Sotelo-Ávila y A. Cafaggi-Félix
División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica
Facultad de Ingeniería, UNAM
E-mails: sotelo@servidor.unam.mx y acafaggi@servidor.unam.mx

(recibido: octubre de 2001; aceptado: diciembre de 2001)

Resumen

Las tres ecuaciones diferenciales del flujo unidimensional fueron obtenidas en su forma general y presentadas en la Revista Ingeniería. Investigación y Tecnología (Vol. II-No.3-Julio-Septiembre-2001). En este artículo se aplican al caso particular del canal y se deducen las ecuaciones para los casos de flujo permanente, gradual y espacialmente variado. Se muestra cómo los principios de energía y de cantidad de movimiento no describen el mismo flujo con idénticos grados de precisión, lo cual sólo se logra cuando se hacen simplificaciones importantes en ambas ecuaciones.

Descriptores: flujo en canales, ecuaciones básicas en la hidráulica.

Abstract

The particular equations for open channel flow are obtained from the general form of the differential equations of continuity, energy and momentum for unsteady, incompressible and one dimensional flow presented in a previous number of this publication. The cases of steady, gradually and spatially varied flow are determined.

Keywords: open channel flow, hydraulic basic equations.

Antecedentes

Existe confusión en la literatura al utilizar las ecuaciones de energía y cantidad de movimiento en el análisis del flujo unidimensional en canales. Los trabajos de Keulegan (1942), Strelkoff (1969), Yen y Wenzel (1970), Yen (1973) y Field *et al.*, (1988) han explicado muchos aspectos de análisis, pero aún persiste la confusión en algunas nociones fundamentales, en particular, cuando se confunde el coeficiente α de Coriolis en la ecuación de la energía con β de Boussinesq en la ecuación de cantidad de movimiento, además, es incorrecto el uso de la ecuación de energía mezclada con la

pendiente de fricción, cuando de hecho la pendiente de la línea de energía es más apropiado.

El análisis de Yen (1970 y 1973) es en muchos aspectos más general que el que se presenta en este artículo, pero también es menos accesible para los lectores, además de que usa únicamente la ecuación de cantidad de movimiento como básica en sus desarrollos y no discute la variación que tienen α y β con el tirante, que en canales de sección compuesta es muy importante, como puede verse en Sotelo (1998).

El propósito de este trabajo es el de aplicar las tres ecuaciones diferenciales del flujo unidimensional obtenidas en su forma general y

presentadas en la Revista Ingeniería. Investigación y Tecnología (2001), al caso particular del canal, sin tener que deducirlas. Se aplican los tres principios básicos a un volumen de control diferencial, si bien en la práctica es común utilizar únicamente dos de ellas, la de continuidad y una de movimiento, dependiendo del flujo particular de que se trate. Se hace por ello una comparación entre las ecuaciones de energía y cantidad de movimiento toda vez que son diferentes entre sí.

El volumen de control VC en un canal es deformable, limitado lateralmente por la superficie de control SC, coincidente con la pared del conducto y con una superficie libre, además de dos secciones transversales al flujo separadas la distancia ds , donde s representa la coordenada curvilínea que sigue el eje de la conducción. La otra variable independiente es el tiempo t . El volumen de líquido contenido en el VC en cualquier instante es $dv = A ds$, donde el área A es función de (s, t) y ds es independiente de ambos. La densidad ρ permanece constante. La velocidad media V también es función de (s, t) . El tirante y se mide normal a la plantilla.

Ecuaciones diferenciales de continuidad, energía y cantidad de movimiento

La forma general de las ecuaciones diferenciales del flujo unidimensional presentadas por Sotelo y Cafaggi (2001) se exponen a continuación.

a) Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial(\rho VA)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

donde ρ , A , y V son funciones de s y t .

b) Ecuación de la energía.

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\rho g} + \alpha \frac{V^2}{2g} \right) - \left(\frac{p}{\rho g} + (\alpha - \beta) \frac{V^2}{2g} \right) \frac{1}{Q} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\beta}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{dh_r}{ds} = 0 \quad (2)$$

El coeficiente de Coriolis α sirve para corregir el cálculo del flujo de energía cinética, y el coeficiente de Boussinesq β se usa para corregir el cálculo de la cantidad de movimiento, ambos empleando la velocidad media V .

La pendiente de energía S_E se define en la forma

$$\frac{dh_r}{ds} = S_E \quad (3)$$

donde dh_r es la pérdida total de energía que ocurre en la distancia ds a lo largo del conducto en cada instante.

c) Ecuación de cantidad de movimiento

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\rho g} + \beta \frac{V^2}{2g} \right) + \frac{V^2}{2g} \frac{\partial \beta}{\partial s} - 2(\beta - 1) \frac{V^2}{2g} \frac{1}{Q} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{dh_f}{ds} = 0 \quad (4)$$

La irreversibilidad en la ecuación de la cantidad de movimiento se explica como la energía dh_f consumida por el trabajo que tienen que realizar las fuerzas de fricción que se oponen al flujo en la distancia ds , es decir, representa la pendiente de fricción.

$$\frac{dh_f}{ds} = S_f = \frac{\tau_0 P}{g \rho A} \quad (5)$$

Donde τ_0 es el esfuerzo tangencial medio en el perímetro de contacto P entre líquido y pared de la sección.

Ecuaciones diferenciales del flujo a superficie libre

Ecuación de continuidad

Cuando el canal es de fondo plano, x representa la coordenada rectilínea que sigue el fondo de la conducción. Dado que la densidad ρ es constante, la ecuación de continuidad en un canal de fondo

plano, donde las secciones transversales están separadas la distancia dx , (Figura 1) es:

$$\frac{\partial(VA)}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (6)$$

o

$$-\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial t} \quad (6a)$$

Ecuación de la energía

En la figura 1 se observa que la carga de posición hasta el centroide de cualquier sección es

$$z_G = z + (y - y_G) \cos \theta$$

donde z es el desnivel entre el fondo de la sección y el plano de referencia. La carga de presión también en el centroide (considerada hidrostática) es

$$\frac{p_G}{\rho g} = y_G \cos \theta$$

Por tanto, la carga piezométrica en cualquier punto de la sección transversal se puede calcular como la suma de ambas

$$z_G + \frac{p_G}{\rho g} = z + y \cos \theta \quad (7)$$

La pendiente longitudinal del fondo se define como

$$S_0 = \text{sen} \theta = -\frac{dz}{dx} = -\frac{\partial z}{\partial x} \quad (8)$$

donde el signo negativo se debe a que z disminuye cuando x aumenta y siempre se interpreta como $\text{sen} \theta$, cualquiera que sea su magnitud.

Sustituyendo las ecuaciones (3), (7) y (8) en la (2), la ecuación de la energía para un canal de eje recto y fondo plano se puede escribir en la forma

$$-S_0 + \frac{\partial}{\partial x} y \cos \theta + \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{V^2}{2g} \right)$$

$$- \left(y_G \cos \theta + (\alpha - \beta) \frac{V^2}{2g} \right) \frac{1}{Q} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\beta}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + S_E = 0 \quad (9)$$

Debido a que en el planteamiento de esta ecuación de energía se utilizó la de continuidad en algunos pasos de su desarrollo, es válido sustituir la ecuación (6a) en algunos términos de dicha ecuación. Por tanto, la ecuación (9) también se escribe como sigue

$$-S_0 + \frac{\partial}{\partial x} y \cos \theta + \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{V^2}{2g} \right) - \frac{y_G \cos \theta}{Q} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\alpha}{Q} \frac{V^2}{2g} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\beta}{Q} \frac{V^2}{2g} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\beta}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + S_E = 0 \quad (10)$$

El término $y_G A$ representa el momento estático del área con respecto de la superficie libre. Al ocurrir el incremento dy del tirante y , se presenta un incremento de dicho momento que, de acuerdo con el teorema de ejes paralelos, vale

$$d(y_G A) = d(y_G + dy) + \frac{T}{2} (dy)^2 - Ay_G = A dy$$

Por ser $(dy)^2$ un término de orden superior, se puede despreciar, por tanto

$$\frac{\partial}{\partial y} (Ay_G) = A \quad (11)$$

y es válido entonces el siguiente desarrollo

$$\frac{\partial}{\partial t} (y_G A) = \frac{\partial}{\partial t} (y_G A) \frac{\partial y}{\partial t} = A \frac{\partial y}{\partial t}$$

Pero también es válido el desarrollo que sigue

$$\frac{\partial}{\partial t} (y_G A) = y_G \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial y_G}{\partial t} = y_G \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial y_G}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

y para que ambos desarrollos sean iguales, se debe cumplir que $\partial y_G / \partial y = 1$, y que $y_G \frac{\partial A}{\partial t} = 0$. Por tanto, la ecuación (10) se reduce a

$$-S_0 + \frac{\partial}{\partial x} y \cos \theta + \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{V^2}{2g} \right) + \frac{\alpha}{Q} \frac{V^2}{2g} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\beta}{Q} \frac{V^2}{2g} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\beta}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + S_E = 0 \quad (12)$$

Por separado se realiza el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2gQ} \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{Q^3}{A^2} \right) &= \frac{1}{2gQ} \frac{\partial}{\partial x} (\alpha V^2 Q) = \\ \frac{1}{2gQ} \left[Q \frac{\partial}{\partial x} (\alpha V^2) + \alpha V^2 \frac{\partial Q}{\partial x} \right] \\ \frac{1}{Q} \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{V^2}{2g} Q \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\alpha V^2}{2g} \right) + \frac{\alpha}{Q} \frac{V^2}{2g} \frac{\partial Q}{\partial x} \end{aligned} \quad (13)$$

Otro desarrollo separado es el siguiente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2gQ} \frac{\partial}{\partial t} \left(\beta \frac{Q^2}{A} \right) &= \frac{1}{2g} \frac{\beta}{Q} \left[-\frac{Q^2}{A^2} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{2Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial t} \right] = \\ \frac{\beta}{g} \frac{1}{A} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\beta}{2g} \frac{Q}{A^2} \frac{\partial A}{\partial t} \end{aligned}$$

donde se ha considerado que β es independiente de t . Además:

$\partial Q / \partial t = \partial VA / \partial t = A(\partial V / \partial t) + V(\partial A / \partial t)$, $Q/A^2 = V/A$, por tanto

$$\frac{1}{2gQ} \frac{\partial}{\partial t} \left(\beta \frac{Q^2}{A} \right) = \frac{\beta}{g} \frac{1}{A} \left[A \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial t} \right] - \frac{\beta}{2g} \frac{V}{A} \frac{\partial A}{\partial t}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{1}{2gQ} \frac{\partial}{\partial t} (\beta QV) &= \\ \frac{\beta}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\beta}{g} \frac{V}{A} \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\beta}{2g} \frac{V}{A} \frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{\beta}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\beta}{Q} \frac{V^2}{2g} \frac{\partial A}{\partial t} \end{aligned} \quad (14)$$

Sustituyendo las ecuaciones (13) y (14) en la (12), una forma más compacta de la ecuación de la energía en canales es

$$-S_0 + \frac{\partial}{\partial x} y \cos \theta + \frac{1}{Q} \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{V^2}{2g} Q \right) + \frac{1}{2gQ} \frac{\partial}{\partial t} (\beta QV) + S_E = 0 \quad (15a)$$

O bien

$$-S_0 + \frac{\partial}{\partial x} y \cos \theta + \frac{1}{2gQ} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\beta \frac{Q^2}{A} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{Q^3}{A^2} \right) \right] + S_E = 0 \quad (15b)$$

La ecuación (15b) es una forma general de la ecuación de la energía en canales de cualquier pendiente y es idéntica a la ecuación de energía obtenida por Field *et al.*, (1998), para canales de pendiente pequeña si se hace $\cos \theta = 1$.

Ecuación de cantidad de movimiento

Se sustituyen las ecuaciones (5), (6a), (7) y (8) en la (4) y se obtiene

$$-S_0 + \frac{\partial}{\partial x} y \cos \theta + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{V^2}{2g} \right) + \frac{V^2}{2g} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\beta}{Q} \frac{V^2}{2g} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{V}{gA} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + S_f = 0 \quad (16)$$

Pero

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{V^2}{2g} \right) = \beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2g} \right) + \frac{V^2}{2g} \frac{\partial \beta}{\partial x}$$

por tanto

$$\frac{V^2}{2g} \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{V^2}{2g} \right) - \beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2g} \right)$$

de manera que la suma de dos de los términos en la ecuación (16) resulta

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{V^2}{2g} \right) + \frac{V^2}{2g} \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{V^2}{g} \right) - \beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2g} \right) \quad (17)$$

Por otra parte

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{V^2}{g} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{Q^2}{gA} \frac{1}{A} \right) = -\frac{\beta}{gA} \frac{Q^2}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{Q^2}{gA} \right) \quad (18)$$

Sustituyendo la ecuación (18) en la (17)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{V^2}{2g} \right) + \frac{V^2}{2g} \frac{\partial \beta}{\partial x} = -\frac{\beta}{A} \frac{V^2}{g} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{Q^2}{gA} \right) - \beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2g} \right) \quad (19)$$

Además, otro de los términos de la ecuación (16) se desarrolla como sigue

$$\frac{\beta}{Q} \frac{V^2}{g} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\beta}{Q} \frac{V^2}{g} \frac{\partial(VA)}{\partial x} = \frac{\beta}{Q} \frac{V^2}{g} \left(V \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\beta}{A} \frac{V^2}{g} \frac{\partial A}{\partial x} + \beta \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\frac{\beta}{Q} \frac{V^2}{g} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\beta}{A} \frac{V^2}{g} \frac{\partial A}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2g} \right) \quad (20)$$

sustituyendo las ecuaciones (19) y (20) en la (16) y simplificando se obtiene

$$-S_0 + \frac{\partial}{\partial x} y \cos \theta + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{Q^2}{gA} \right) + \frac{V}{gA} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + S_f = 0 \quad (21)$$

que es otra forma de presentar la ecuación de cantidad de movimiento en canales.

Field *et al.*, (1998) presentan la ecuación de cantidad de movimiento en la forma

$$-S_0 + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left[\beta \frac{Q^2}{gA} + Ay_c \right] + \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} + S_f = 0 \quad (22)$$

De la ecuación (11) se puede escribir

$$\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (Ay_c) = \frac{1}{A} \left[\frac{\partial}{\partial y} (Ay_c) \right] \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

Por tanto, la ecuación (22) se puede escribir

$$-S_0 + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{Q^2}{gA} \right) + \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} + S_f = 0$$

Pero

$$\frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{gA} \frac{\partial(VA)}{\partial t} = \frac{V}{gA} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t}$$

y la ecuación (22) se presenta de la forma

$$-S_0 + \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{Q^2}{gA} \right) + \frac{V}{gA} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + S_f = 0$$

Que es idéntica a la ecuación (21) cuando ésta se emplea en canales de pendiente pequeña ($\cos \theta = 1$).

Casos particulares

a) Flujo espacialmente variado no permanente

Es común presentar la ecuación de continuidad (6a) en la forma

$$V \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (23)$$

La ecuación de energía en su versión (12) o (15b) y la de cantidad de movimiento en su versión (16) o (21) permanecen las mismas, pero es más común utilizar la segunda.

b) Flujo gradualmente variado no permanente

Cualquier forma de sección

Hipótesis

1. No existe aportación o salida del agua en toda su longitud $\partial Q/\partial x=0$.
2. Utiliza las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento.
3. El valor de β es constante.

Al sustituir la ecuación de continuidad (6a) en la de cantidad de movimiento (16), se tiene

$$-S_0 + \frac{\partial}{\partial x} y \cos \theta + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{V^2}{2g} \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + S_f = 0 \quad (24)$$

Sección rectangular (Ecuaciones de Saint-Venant)

Hipótesis

1. El canal es de pendiente pequeña ($\cos \theta=1$) y de sección transversal rectangular. $A=by$, donde b es el ancho del canal.
2. Utiliza las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento.
3. El valor de β es 1.

En un canal rectangular se define el gasto unitario $q = Q/b$, y se sustituye en la ecuación (6a) obteniendo la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad (25)$$

La ecuación (24) se puede escribir en la forma

$$-S_0 + \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2g} \right) + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + S_f = 0$$

$$-S_0 + \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + S_f = 0 \quad (26)$$

que es la ecuación para flujo no permanente y gradualmente variado en un canal de sección rectangular. Las ecuaciones (25) y (26) también se conocen como ecuaciones de Saint - Venant.

c) Flujo espacialmente variado permanente

Gasto creciente

Hipótesis

1. dQ/dx es el gasto unitario q^* que se aporta lateralmente en dirección perpendicular al eje del canal.
2. Utiliza los principios de continuidad y cantidad de movimiento.
3. Se considera $\beta = \alpha$.

Como sólo se tiene variación con respecto a x , de la ecuación (21) y las hipótesis mencionadas, se puede escribir

$$-S_0 + \cos \theta \frac{dy}{dx} + \frac{\alpha}{gA} \frac{d}{dx} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + S_f = 0 \quad (27)$$

donde

$$\frac{\alpha}{gA} \frac{d}{dx} \left(\frac{Q^2}{A} \right) = -\frac{\alpha Q^2}{gA^3} \frac{dA}{dx} + \frac{2\alpha Q}{gA^2} \frac{dQ}{dx};$$

además

$$\frac{dA}{dx} = T \frac{dy}{dx},$$

donde T es el ancho de la superficie libre, por lo que

$$\frac{\alpha}{gA} \frac{d}{dx} \left(\frac{Q^2}{A} \right) = -\frac{\alpha V^2}{g(A/T)} \frac{dy}{dx} + \frac{2\alpha Q}{gA^2} \frac{dQ}{dx}$$

El número de Froude es

$$F = \frac{V}{\sqrt{\frac{gA}{\alpha T}}}$$

y se puede escribir

$$\frac{\alpha}{gA} \frac{d}{dx} \left(\frac{Q^2}{A} \right) = -F^2 \frac{dy}{dx} + \frac{2\alpha Q}{gA^2} \frac{dQ}{dx} \quad (28)$$

Con la ecuación (28) en la (27) y despejando resulta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f - \frac{2\alpha Q}{gA^2} \frac{dQ}{dx}}{\cos \theta - F^2} \quad (29)$$

Cuando la pendiente es pequeña, se hace $\cos \theta = 1$, en la ecuación (29).

Gasto decreciente

Hipótesis

1. dQ/dx es el gasto unitario q^* que sale lateralmente del canal.
2. Utiliza los principios de continuidad y de energía.
3. La pérdida de energía más importante es por fricción, por lo que $S_E = S_f$.
4. Se considera $\beta = \alpha$.

De la ecuación (6a) en la ecuación de la energía (12), y desarrollando uno de los términos, se puede escribir

$$-S_0 + \frac{\partial}{\partial x} \left(y \cos \theta + \alpha \frac{V^2}{2g} \right) + \frac{\alpha V^2}{Q} \frac{\partial Q}{2g \partial x} - \frac{\alpha V^2}{Q} \frac{\partial Q}{2g \partial x} + \frac{\alpha A}{g} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\alpha Q}{gA^2} \frac{\partial A}{\partial t} + S_f = 0 \quad (30)$$

como el flujo es permanente $\partial Q/\partial t = 0$, de la ecuación de continuidad (6a) en la ecuación (30), y al tener solo variación en x se tiene

$$-S_0 + \frac{d}{dx} \left(y \cos \theta + \alpha \frac{V^2}{2g} \right) + \frac{\alpha Q}{gA^2} \frac{dQ}{dx} + S_f = 0 \quad (31)$$

La energía específica se define como

$$E = y \cos \theta + \alpha \frac{V^2}{2g};$$

además

$$\frac{dE}{dy} = (\cos \theta - F^2),$$

y

$$\frac{dE}{dx} = \frac{dy}{dx} \frac{dE}{dy},$$

por lo que la ecuación (31) se puede escribir

$$-S_0 + \frac{dy}{dx} (\cos \theta - F^2) + \frac{\alpha Q}{gA^2} \frac{dQ}{dx} + S_f = 0.$$

despejando dy/dx , se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f - \frac{\alpha Q}{gA^2} \frac{dQ}{dx}}{\cos \theta - F^2} \quad (32)$$

Cuando el canal es de pendiente pequeña, se hace $\cos \theta = 1$ en la ecuación (32).

Gradualmente variado permanente

Hipótesis

1. Utiliza los principios de continuidad y de energía.
2. La pérdida de energía más importante es por fricción, por lo que $S_E = S_f$.
3. Se considera $\beta = \alpha$.

Cuando $dQ/dx = 0$, la ecuación (32) es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{\cos \theta - F^2} \quad (33)$$

que es la ecuación dinámica. Idéntico resultado se obtiene a partir de la ecuación (29) que emplea el principio de cantidad de movimiento; cuando el canal es de pendiente pequeña, se hace $\cos \theta = 1$.

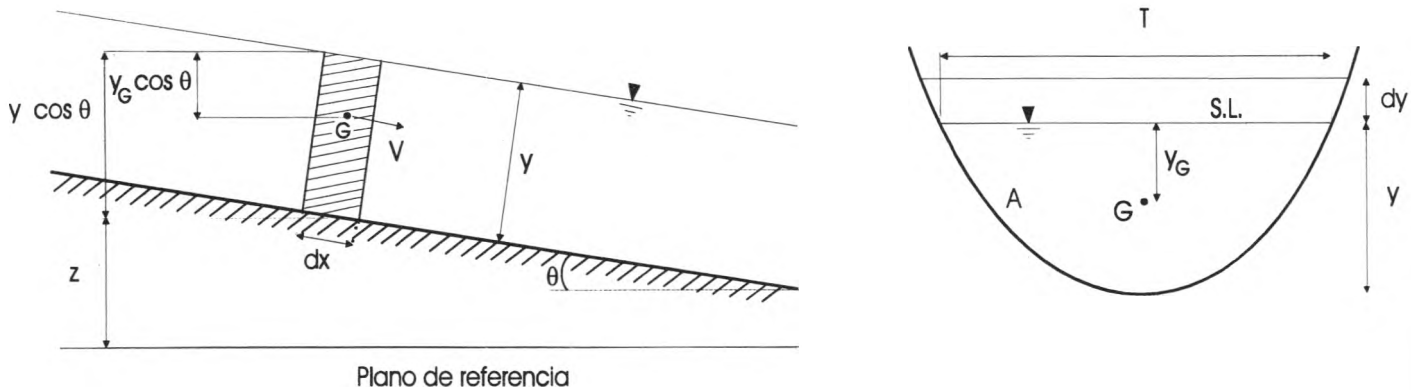


Figura 1. Corte longitudinal y sección transversal de un canal de eje recto y fondo plano

Conclusiones

La forma general de cada una de las ecuaciones diferenciales del flujo unidimensional (continuidad, energía y cantidad del movimiento, previamente obtenidas), permiten deducir las respectivas ecuaciones aplicadas al canal.

Con las ecuaciones generales del canal se obtienen las respectivas ecuaciones diferenciales para cada caso particular sin necesidad de volver a plantear cada vez un nuevo desarrollo. El análisis muestra, en cada caso, cuando la ecuación de la energía o de la cantidad de movimiento describe con mayor grado de precisión al flujo que se trate.

Referencias

- Field W.G., Lambert M.F. y Williams B.J. (1998). Energy and Momentum in One Dimensional Open Channel Flow. *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 36, No. 1.
- Keulegan G.H. (1942). Equation of Motion for the Steady Mean Flow of Water in Open Channels. *Research Paper RP1488, National Bureau of Standards, US. Department of Commerce*, 97-111.
- Sotelo G. (1998). Algoritmo del método de Blalock y Sturm para determinar los tirantes críticos múltiples en canales compuestos. *Ingeniería Hidráulica en México*, Vol. XIII, No.1, 51-60.
- Sotelo G. y Cafaggi A. (2001). La forma diferencial de las ecuaciones básicas del flujo unidimensional. *Ingeniería. Investigación y Tecnología*, Vol. II, No.3, 119-126.
- Strelkof T. (1969). One Dimensional Equations of Open Channel Flow. *Journal of the Hydraulics Division ASCE*, Vol. 95, No. HY3, 861-876.
- Yen B.C. y Wenzel H.G. (1970). Dynamic Equations for Spatially Varied Flow. *Journal of the Hydraulics Division ASCE*, Vol. 96, No. HY3, 801-814.
- Yen B.C. (1973). Open Channel Flow Equations Revisited. *Journal of the Hydraulics Division ASCE*, Vol. 99, No. EM5, 801-814.

Semblanza de los autores

Gilberto Sotelo-Ávila. Obtuvo los grados de ingeniero civil, maestro en ingeniería y doctor en ingeniería en la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Inició su actividad universitaria en 1958 como investigador en el Instituto de Ingeniería y como profesor en licenciatura y posgrado dentro de la misma Facultad, actividades que funge actualmente. Fue jefe de la División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica, consejero técnico de la Facultad de Ingeniería y consejero académico de área en la UNAM. Es investigador nacional nivel 2 del Sistema Nacional de Investigadores del CONACYT y ha recibido los premios Universidad Nacional 1998 y Docencia en Ciencias Exactas en la UNAM, asimismo; el premio nacional Miguel A. Urquijo 1999, otorgado por el Colegio de Ingenieros Civiles de México al mejor artículo técnico publicado durante 1997 y 1998. El Consejo Técnico de la Facultad de Ingeniería de la UNAM le otorgó las cátedras especiales Javier Barros Sierra en 1999 y Mariano Hernández Barrenchea en el año 2000. Es miembro de la Academia Mexicana de Ciencias de la Asociación Internacional de Investigaciones Hidráulicas del Colegio de Ingenieros Civiles de México y del Consejo Académico del CENEVAL para el examen de calidad profesional de los ingenieros civiles.

Adriana Cafaggi-Félix. Ingeniera civil egresada en 1980 de la Facultad de Ingeniería UNAM, obtuvo el grado de maestra en ingeniería hidráulica en 1985 en la misma institución. Fue jefa del laboratorio y del Departamento de Hidráulica; actualmente es profesora de carrera en el Departamento de Ingeniería Hidráulica. Ha participado en congresos nacionales e internacionales y es autora de varios artículos e instructivos de prácticas para el Laboratorio de Hidráulica.

