Ingeniería Investigación y Tecnología, ISSN 2594-0732, III.2, 71-92, 2002
(artículo arbitrado)
DOI: http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2002.03n2.009

El acertijo de las doce monedas (1ª Parte)

M.A. Murray-Lasso
Unidad de Enseñanza Auxiliada por Computadora
Departamento de Ingeniería de Sistemas
División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM

(recibido: abril de 2001; aceptado: septiembre de 2001)

Resumen

En la enseñanza de la resolución de problemas para preparar ingenieros, una de las técnicas útiles es el análisis cuidadoso de acertijos matemáticos bien seleccionados por los maestros, los cuales sean paradigmas de familias con problemas de importantes extensiones y para cuya solución intervengan herramientas, conceptos y técnicas con aplicabilidad en otras áreas aparentemente desconectadas. En este artículo aparece un acertijo que se ha presentado anteriormente en la literatura, tanto de matemáticas recreativas, como de investigación en teoría de información, teoría de la computación y teoría de sistemas, ya que cumple con las condiciones mencionadas. Después de analizar algunas versiones sencillas del acertijo, el problema de las doce monedas es analizado en gran detalle y extendido hasta el límite, generalizado además para números arbitrarios de pesadas. En la segunda parte de este artículo, se darán aplicaciones prácticas derivadas del acertijo de las doce monedas.

Descriptores: acertijos matemáticos, diagnóstico, árbol de búsqueda, búsqueda ternaria.

Abstract

In the teaching of problem-solving for engineers, one of the useful techniques is the careful analysis of well-teacher-selected mathematical puzzles that can serve as paradigms of families of problems with important extensions and whose solution requires the use of tools, concepts and techniques applicable in other apparently unconnected areas. In this article a puzzle is presented which has appeared several times in the literature, both of recreational mathematics and research in Information Theory, Computer Science and Systems Theory and which satisfies the conditions mentioned. After analyzing some simple versions of the puzzle, the problem of the twelve coins is analyzed in great detail, extended to the limit and generalized for an arbitrary number of weighings. In a second article several applications derived from the puzzle will be presented.

Keywords: mathematical puzzles, diagnostics, search tree, ternary search.

Introducción

El tema central de la enseñanza de la ingeniería es el aprendizaje de la resolución de problemas como los que se le presentarán en su ejercicio profesional al ingeniero. Dado el avance tan rápido de la tecnología, resulta casi imposible predecir qué tipo de problemas se les presentarán a los futuros ingenieros después de que reciban su título. Los que

DOI: http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2002.03n2.009

actualmente trabajamos, ya sea en el ejercicio profesional privado, en una institución pública o empresa privada, o como profesores en esta Facultad, aprendimos el uso de la regla de cálculo, la regla T y las escuadras para dibujo constructivo, del teodolito, tránsito y nivel para topografía, de diversos nomogramas para hacer ciertos cálculos, también aprendimos electrónica con tubos al vacío, control con sistemas neumáticos, y muchas otras cosas que con los avances tecnológicos se han vuelto obsoletas, por ejemplo, la computadora y las calculadoras electrónicas han suplantado a la regla de cálculo, los paquetes de dibujo computarizados CAM/CAD a las técnicas manuales de dibujo, los sistemas de posicionamiento global en gran medida a los levantamientos con tránsito, los programas de cómputo a los nomogramas, los "chips" han hecho desaparecer los tubos al vacío, y los sistemas neumáticos han sido reemplazados en gran medida por sistemas de control electrónicos, basados en microprocesadores. No basta cambiar los planes de estudio para estudiar microprocesadores en vez de tubos al vacío, pero sin duda hay que hacerlo; si se pretende que los ingenieros tengan una vida útil de por lo menos 30 años después de su recepción profesional, se les deberá enseñar cómo enfrentar problemas que actualmente no existen, en otras palabras, tendrán que aprender a pensar.

No se sabe cuál es la mejor manera de enseñar a pensar, aunque es poco probable que sea el método actual de enseñanza en la mayor parte de las escuelas, el cual consiste en que el profesor se pare enfrente de los alumnos y hable durante 50 minutos, escribiendo de vez en cuando en el pizarrón o mostrando algunas imágenes en una pantalla. Una mejor manera, es darles a los alumnos la oportunidad de poner en práctica el pensar bajo la supervisión del maestro, disponiendo de toda la tecnología como libros, revistas y otros materiales impresos (mapas, diagramas, etc.); los laboratorios, museos y talleres, las películas, audiocintas, discos convencionales y compactos, cintas de video, videodiscos digitales y diapositivas educativas; las conferencias y mesas de discusión, ya sean presenciales o difundidas por medios electrónicos; las computadoras con programas y bancos de datos adecuados, ya sean individuales o conectadas en red, incluyendo la Internet; la comunicación con otros estudiosos y expertos ya sea presencial, verbal, epistolar, por correo convencional o electrónico. Si se acepta lo mencionado, los cursos que se impartirían serían algo cercano a los cursos proyecto en los cuales se resolverían problemas reales o inventados, cuidadosamente seleccionados por los profesores. La solución de dichos problemas les daría a los estudiantes la oportunidad de practicar la actividad de pensar y de utilizar las herramientas contemporáneas para resolver problemas.

Para enseñar a resolver problemas en los que el principal ingrediente son las ideas, el autor ha encontrado útiles acertijos matemáticos, los cuales tienen la ventaja de ser compactos en su planteamiento, ya que se recuerdan fácilmente, son un reto y motivan al estudiante. Un buen acertijo es un modelo de problema que puede servir para ilustrar toda una familia de problemas similares, rica en ideas y frecuentemente con conexiones inesperadas a otros problemas aparentemente desconectados. En este artículo se plantea y discute uno de los acertijos matemáticos favoritos del autor, el cual durante muchos años se lo ha planteado a sus alumnos, quienes algunos años después, aún lo recuerdan. El acertijo se ha mencionado varias veces en la literatura, tanto de acertijos como de investigación (Kordemsky,1992); (Graham, 1959); (Bellman, et al., 1970); (Bellman y Gluss, 1961); (Raisbeck, 1963); (Hammersley, 1948).

Además de discutir las ideas principales para su solución y el uso de la computadora como herramienta de apoyo, en el artículo se discuten también algunas posibles aplicaciones de las ideas para resolver problemas que están relacionados pero aparentan estar desligados. En la segunda parte de este trabajo se pasa de un acertijo a problemas más serios, como el diagnóstico médico. En general, se muestra el diagnóstico de sistemas y su posible relación con la teoría de la codificación en los sistemas de comunicación, así como con problemas de computación asociados con las bases de datos, temas que aparentemente no guardan ninguna relación con el acertijo.

DOI: http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2002.03n2.009

El acertijo de las doce monedas

Se tienen doce monedas aparentemente iguales, entre ellas una es falsa, pues está hecha con otro metal, por lo tanto, tiene un peso diferente de las monedas buenas. De antemano, no se sabe si la moneda falsa es más pesada o menos pesada que las buenas. Se cuenta con una balanza de comparación (de dos platillos en los que se colocan los cuerpos cuyos pesos se quieren comparar) como única herramienta para detectar la moneda falsa. El acertijo consiste en encontrar una estrategia de tres pesadas para determinar con certeza: 1) Cuál es la moneda falsa y 2) Qué defecto tiene la moneda falsa, es decir, si es más pesada o más ligera que las monedas buenas.

Nótese que la solución del acertijo es una estrategia, es decir, un procedimiento análogo al siguiente (del cual describimos solamente los primeros pasos): se numeran las monedas del 1 al 12. Para la primera pesada se ponen en el platillo izquierdo las monedas 1, 2, 3, y en el derecho las monedas 10, 11 y 12. Si la balanza se equilibra entonces se sabrá que la moneda falsa está entre la 4, 5, 6, 7, 8, 9. Para la segunda pesada, se ponen en el platillo izquierdo las monedas 4 y 5, y en el platillo derecho las monedas 9 y 10, etc.

La discusión que sigue sobre la solución del acertijo es mucho más interesante para los lectores que hayan intentado seriamente la solución del mismo que para los que no lo hayan hecho. Solamente las personas con mucha capacidad mental deben intentar resolverlo sin sacar lápiz y papel para hacer diagramas, ya que la experiencia del autor es que una persona con inteligencia promedio (el problema se le ha planteado a estudiantes de ingeniería, matemáticas, humanidades y personas sin estudios universitarios) puede llevarle de 2 a 4 horas encontrar una solución.

Frecuentemente, una persona cree tener una solución sin tenerla. Una prueba de que se tiene una solución es hacer una simulación de pensamiento. Se piensa en una moneda falsa específica, digamos la moneda 7, más pesada que las buenas. Se aplica la estrategia y se verifica que ésta determine que la moneda falsa es la 7 y que el defecto es ser más pesada que las demás. Se repite todo el procedimiento para cada una de las posibles situaciones (1 pesada, 1 ligera, 2 pesada, 2 ligera, ... , 12 pesada, 12 ligera). Si para cada uno de los casos la estrategia determina con certeza la moneda falsa y su defecto, entonces la estrategia es una respuesta correcta al acertijo. Basta con que un solo caso falle para que se considere incorrecta la respuesta. ¡SUSPENDA LA LECTURA Y RETÍRESE, POR FAVOR, A RESOLVER EL ACERTIJO! *Al regresar, ya sea que haya resuelto el acertijo o que se haya dado por vencido, continúe la lectura, el esfuerzo realizado le ayudará a obtener un mayor beneficio de la misma.*

Discusión preliminar sobre el acertijo: Acertijos más sencillos

Dado que el acertijo planteado es difícil, una útil técnica didáctica recomendada por el eminente profesor de matemáticas G. Polya (1965) es intentar resolver acertijos similares más sencillos antes de intentar el difícil. Supóngase que se sabe de antemano que la moneda falsa es más pesada que las monedas buenas. Se podrían poner en el platillo izquierdo las monedas 1 a 6 y en el platillo derecho las monedas 7 a 12. La balanza necesariamente se desequilibrará, pues es dato del acertijo que una de las monedas es más pesada que las demás. Con esta primera pesada se puede reducir la incertidumbre de la moneda falsa a una de entre 6 monedas que están en el platillo que descendió. Como segunda pesada se toman 3 de esas monedas y se colocan en el platillo izquierdo; así las otras tres en el derecho, con lo que se reducirán a 3 monedas la incertidumbre sobre cuál es la moneda falsa. Las tres monedas sospechosas serán las que están en el platillo que descendió en la segunda pesada. En la tercera pesada, siendo impar el número de monedas sospechosas, no podemos poner la mitad en cada platillo, sin embargo, se puede apartar una de las monedas dejándola fuera de la balanza y comparar las otras dos. Si la balanza queda en equilibrio sabremos que la moneda falsa fue la que apartamos. Si la balanza se desequilibra, la moneda falsa será la que está en el platillo que descendió. Se ha resuelto este acertijo simplificado. Resulta útil representar en detalle la solución por medio de un diagrama como el que se muestra en la figura 1.

DOI: http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2002.03n2.009

Convendremos que en cada trifurcación, la rama izquierda corresponde a la situación en la que el plato izquierdo baja; la central corresponde a la balanza equilibrada y la derecha a aquella en la que el plato derecho baja.

En la figura 1 las líneas inclinadas en dirección noreste-sudoeste indican que el plato izquierdo bajó, las inclinadas en dirección noroeste-sudeste indican que el plato derecho bajó, y las verticales indican que la balanza se equilibró. Los resultados finales de los experimentos se muestran en los cuadrados, es decir, si en la primera pesada el plato izquierdo bajó, en la segunda el plato derecho bajó, y en la tercera pesada la balanza quedó en equilibrio, la moneda defectuosa es la moneda 6, ya que en la primera pesada dicha moneda estaba en el plato izquierdo y por ser más pesada hizo que bajara dicho plato, en la segunda pesada (1, 2, 3 contra 4, 5, 6) la moneda 6 se puso en el plato derecho, por lo tanto, es el plato derecho el que baja, y en la tercera pesada (4 contra 5) la moneda 6 no se puso en la balanza, por lo que la balanza quedó en equilibrio. El camino desde la primera pesada a la caja que representa la moneda defectuosa 6, en el más bajo nivel del diagrama, pasa por una línea en dirección noreste-sudoeste, luego por una línea noroeste-sudeste y, finalmente, por una línea vertical, éstas representan respectivamente plato izquierdo baja, plato derecho baja y balanza en equilibrio. Nótese que en la primera y segunda pesadas no hay líneas verticales, porque, dados los datos del problema hay una moneda más pesada y la balanza no puede quedar en equilibrio.

Algunas de las ideas que han resultado útiles son las siguientes:

1. Cada pesada elimina algunas de las monedas sospechosas.
2. Puede ser útil dejar algunas monedas fuera de la balanza.
3. Los diagramas en forma de árbol invertido son útiles para visualizar la situación.

Pequeña digresión. La búsqueda binaria o dicótoma

Una vez que se han identificado las tres ideas mencionadas, el profesor puede aprovechar la oportunidad para mostrar algunas posibles aplicaciones de dichas ideas en problemas diferentes, ilustraremos aquí una de ellas. Una técnica de búsqueda de archivos llamada "búsqueda binaria" en el diseño de bancos de datos, se utiliza mucho para localizar la llave de un registro determinado. Las llaves se mantienen en orden lexicográfico (el orden que se utiliza en

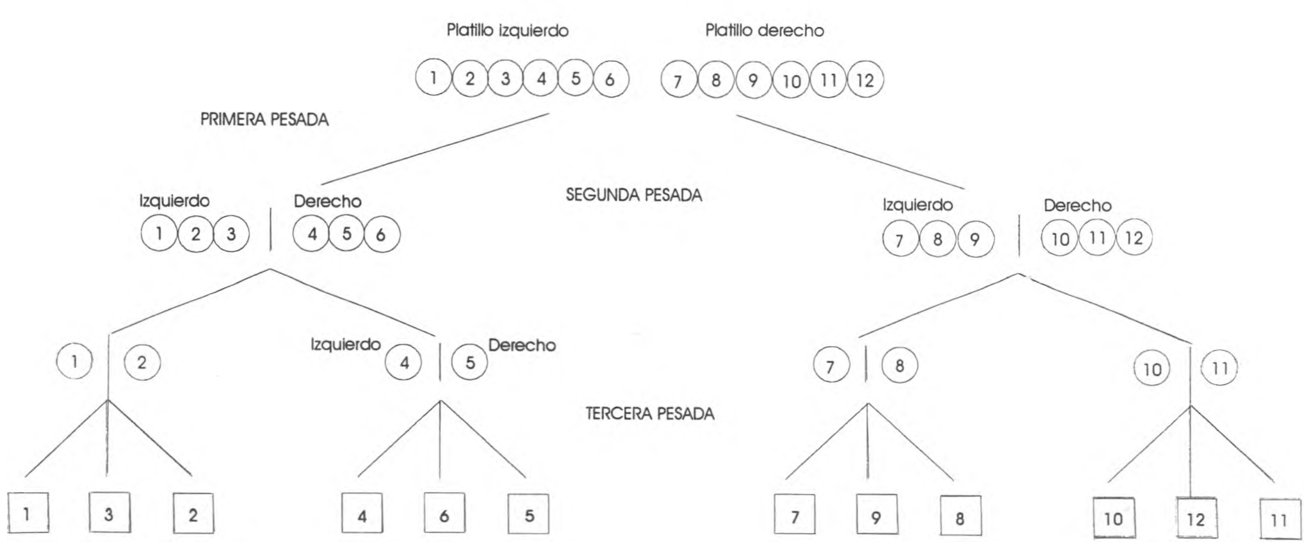

Figura 1

DOI: http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2002.03n2.009

directorios telefónicos y en diccionarios) ascendente (o descendente) en un arreglo bidimensional con dos columnas, una para las llaves y otra para las direcciones en disco donde se guarda todo el resto de la información del registro correspondiente, (nombre, dirección, teléfono, RFC, sueldo, fecha de ingreso a la empresa, etc.). Se inicia comparando la llave del registro que se busca con la llave que está a la mitad del vector mencionado, usando como índice para acceder al arreglo INT((I + F)/2) donde I e F son los índices del principio y fin del vector de claves, y la función INT cuando su argumento es entero regresa el argumento, cuando es fraccionario regresa el entero inmediatamente a la izquierda del argumento. Si las llaves coinciden se ha encontrado la posición del registro y se procede a recuperar la información del mismo usando la dirección en la segunda columna. Si la llave buscada es mayor que la llave a la mitad, se pueden eliminar de la búsqueda todas las llaves con índice igual o menor que (I + F)/2. Si en cambio, la llave buscada es menor que la llave a la mitad se pueden eliminar de la búsqueda todas las llaves con índice igual o mayor que (I + F)/2. De ahí en adelante se ajustan los índices del inicio I y fin F del trozo de arreglo no eliminado de la búsqueda y con dicho pedazo de arreglo se aplica el mismo procedimiento, es decir, se compara la llave buscada con la llave del elemento a la mitad del pedazo de arreglo restante y como resultado de dicha comparación, se decide si se ha encontrado la llave buscada o si se elimina la mitad superior o la mitad inferior del trozo de arreglo restante. Al no encontrar la llave se elimina la mitad del arreglo restante, sus índices del inicio y fin I, F se van acercando muy rápidamente hasta que, o se encuentra la llave o se cruzan los índices, concluyendo que la llave buscada no aparece en el arreglo original. El número de comparaciones de llaves no excede $\log_2 (M) + 1$, donde M es la longitud del vector inicial de llaves. El método es muy rápido, pues para un archivo con un millón de registros bastan 21 comparaciones para encontrar el registro de cualquier llave y para un archivo inmenso con 10^{12} registros (167 registros para cada habitante de la tierra) bastarían 41 comparaciones. Invitamos al lector a escribir en cualquier lenguaje que maneje arreglos, una rutina que busque una llave mediante una búsqueda binaria o dicótoma.

Regresando al acertijo de las doce monedas

El lector que ha intentado resolver el acertijo de las doce monedas está preparado para apreciar la siguiente aseveración: Cada pesada elimina un grupo de posibilidades, por lo que si las pesadas están adecuadamente diseñadas, el grupo de posibles monedas defectuosas se va reduciendo rápidamente en tamaño. Si analizamos la solución del problema de doce monedas con una moneda falsa más pesada que las demás, nos percatamos de que en la primera pesada podemos eliminar de sospecha 6 monedas. En la segunda pesada eliminamos de sospecha otras 3 monedas. Y en la última eliminamos 2 monedas adicionales. Habiendo eliminado 6 + 3 + 2 = 11 monedas, queda una posible, la cual debe ser la defectuosa. Como sabemos que el defecto es estar más pesada que las demás, hemos encontrado la solución del acertijo simplificado (es importante saber de antemano que la moneda falsa es más pesada que las demás) de las doce monedas. El acertijo original, sin simplificación, es más difícil, pues si en la primera pesada ponemos las monedas 1 a 6 en el platillo izquierdo y en el derecho ponemos las monedas 7 a 12, y baja el platillo izquierdo, no podemos concluir que la moneda defectuosa está en el grupo que incluye las monedas 1 a 6, puesto que es posible que una de las monedas del 7 al 12 sea más ligera que las demás. Resulta que si baja el platillo izquierdo <u>no podemos eliminar ninguna de las monedas</u>. Similar conclusión obtendríamos si bajara el platillo derecho. La primera pesada eliminaría monedas solamente si dejáramos algunas monedas fuera, porque si se equilibra podemos eliminar las monedas en la balanza y si se desequilibra, las monedas que están fuera. La balanza no puede quedar en equilibrio si ponemos todas las monedas en la misma, pues sabemos que una de las monedas tiene un peso

DOI: http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2002.03n2.009

diferente a las demás. Por analogía, con la tercer pesada del acertijo simplificado se nos ocurre la idea de apartar alguna o algunas monedas y no ponerlas sobre la balanza en la primera pesada. Consideraciones de simetría que se justificarán rigurosamente más adelante, nos indican que debemos formar 3 grupos de monedas de cuatro cada uno, a saber: {1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}, {9, 10, 11, 12} y en la primera pesada dejar uno de los grupos fuera comparando los pesos de los otros dos grupos.

La siguiente idea importante que debemos captar para no tener que resolver el acertijo por ensayo y error, es reconocer que los defectos son 24 y no 12. Si usamos las letras P para pesada y L para ligera, los defectos son 1P, 1L, 2P, 2L, ... , 12P, 12L (24 defectos en total). Una vez que se reconozca lo anterior y se coloquen 6 monedas en el platillo izquierdo y 6 en el derecho, la balanza se desequilibrará, no obstante que no podrían eliminarse totalmente ninguna de las monedas, sí eliminaríamos defectos. Si el platillo izquierdo bajase, quedarían eliminados los siguientes posibles defectos: 1L, 2L, 3L, 4L, 5L, 6L, 7P, 8P, 9P, 10P, 11P, 12P. Vemos entonces que aunque la balanza se desequilibrara, la pesada sí nos daría información. Más adelante se muestra que esta pesada (poner la mitad de las monedas en el platillo izquierdo y la otra mitad en el platillo derecho) no puede ser parte de una estrategia exitosa, mientras que la primera pesada en la que ponemos cuatro monedas en el platillo izquierdo y cuatro en el derecho sí.

En la búsqueda binaria, cada comparación de llaves o tenía éxito y encontraba la llave buscada, o eliminaba (aproximadamente) la mitad de los registros restantes en donde podría estar la llave buscada. En el acertijo de las 12 monedas, la primera pesada, colocando 6 monedas contra 6, podría eliminar 12 defectos de 24 posibles en caso de desequilibrio, y ninguno en caso de equilibrio, (cosa que no puede suceder, pues es dato que hay una moneda defectuosa).

Más problemas sencillos de pesadas

Un segundo problema fácil que plantearemos, servirá para otros más complejos. Se trata de lo siguiente: se tienen 9 monedas aparentemente iguales, pero una de ellas pesa más que las demás. El problema es diseñar una estrategia que determine en <u>dos</u> pesadas con una balanza de comparación cuál de las monedas es la falsa. Algunos estudiantes han oído hablar de la técnica de dicotomía, mencionada anteriormente, y se les ocurre que el primer experimento podría ser dividir las monedas en dos grupos aproximadamente iguales y pesar uno contra el otro. El lado que baje tendrá la moneda falsa y se habrán eliminado aproximadamente la mitad de las monedas. Sucesivas aplicaciones de la misma técnica irán reduciendo las monedas en duda por mitades, hasta que se logre aislar la moneda falsa. Como se trata de 9 monedas, se podría pensar que el primer experimento consiste en numerar las monedas, agrupar las numeradas 1 a 4 y ponerlas del lado izquierdo de la balanza. Agrupar las monedas numeradas 5 a 8 y ponerlas del lado derecho de la balanza. La moneda 9 queda fuera del primer experimento. En caso de que en la primera pesada la balanza quede en equilibrio, sabríamos que la moneda 9 es la falsa. Después de la primera pesada descrita (suponiendo que la balanza no quede en equilibrio) y determinado el grupo de 4 monedas en las que está la falsa, se repite el proceso con 2 y 2 monedas tomadas del grupo en el que está la falsa. Con esto se reduce a dos monedas el grupo en el que está la falsa. Con un experimento final del mismo tipo se puede aislar la moneda falsa. La estrategia funciona, sin embargo, no cumple con la condición de que la determinación se haga en solamente 2 pesadas.

Ahora atacaremos el problema de atrás para adelante (otra de las recomendaciones del Prof. Polya). Sabemos que si se tuviéran 3 monedas podríamos determinar la falsa en una pesada como vimos arriba. Eso significa que se podrían dejar 3 monedas fuera en el primer experimento, sabiendo que en caso de que la balanza quede en equilibrio en la primera pesada, la falsa quedará entre las 3 que quedaron fuera; como se indicó antes, en una pesada más podemos determinar cuál es la falsa. Por otra parte, si la balanza no queda en equilibrio, la moneda falsa debe estar entre las monedas que están en el platillo que bajó. Como cada platillo

DOI: http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2002.03n2.009

tiene 3 monedas, en una posterior pesada se puede determinar la moneda falsa. Hemos logrado resolver el problema. Resumiendo, la técnica es: se forman tres grupos de tres monedas cada uno. Se pesa el primer grupo contra el segundo y se deja fuera el tercer grupo. Si la balanza se desequilibra, se toman las tres monedas del plato que baja como las activas en la segunda pesada. Si la balanza se equilibra en la primera pesada se toman las monedas que quedaron fuera como las monedas activas de la segunda pesada. En la segunda pesada de las tres monedas, se ponen las primeras dos, una en cada platillo y se deja la tercera fuera. Si la balanza se desequilibra, la moneda que está en el plato que bajó es la falsa. Si la balanza queda equilibrada, la moneda falsa es la que quedó fuera. La información descrita se puede presentar gráficamente en la figura 2.

Problema sencillo con ocho monedas

Supóngase que el problema anterior se plantea de igual forma, pero con ocho monedas en vez de nueve. En este caso, no es posible formar tres grupos de tres monedas cada uno. Sin embargo, lo que si se puede integrar son 2 grupos de 3 monedas y uno de 2. El de 2 monedas puede ser el que se deje fuera. Haciendo esto, no cambia prácticamente en nada la estrategia, pues en el caso de que se equilibre la balanza en la primera pesada, simplemente se pesan en la segunda las monedas 7 y 8 y no se deja ninguna fuera. En este caso, en la segunda pesada la balanza no se puede equilibrar, pues es dato del problema que una de ellas es definitivamente más pesada. Por esa razón, en lugar de rotular el cuadro de en medio del grupo central en la parte inferior de la figura 2 con 9, se puede rotular con I (de imposible) y utilizar el mismo árbol diagnóstico borrando la moneda 9 de cualquier otro lugar en el que aparezca. Con esta explicación se cumple el resultado de la versión del problema y ahora pasaremos a uno que es considerablemente más complicado.

Problema difícil de pesadas. Doce monedas con una falsa que puede ser pesada o ligera

Ahora se resolverá el problema original, el cual es considerablemente más difícil que los anteriores. Repetimos el enunciado: se tienen 12 monedas aparentemente iguales, pero una de ellas es falsa y tiene un peso diferente a las demás, asimismo, no se sabe si es más pesada o más ligera. Diseñar una estrategia que en tres pesadas con una balanza de

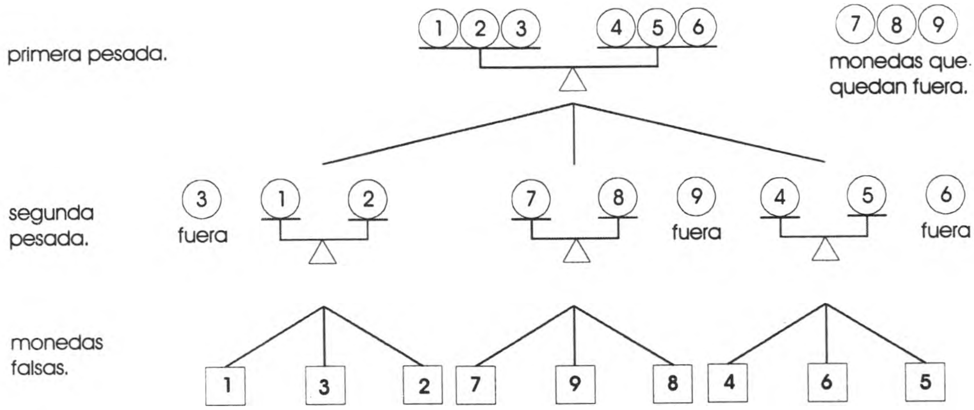

Figura 2

DOI: http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2002.03n2.009

comparación (del mismo tipo que la utilizada en los problemas anteriores) determine: 1) Cuál es la moneda falsa. 2) Qué defecto tiene, es decir, determinar si es más pesada o más ligera que las demás.

La mayor parte de los estudiantes que resuelven este problema lo hacen por ensayo y error con poca guía teórica que oriente los experimentos que ensayan. En algún momento, sobre todo si ya resolvieron previamente el problema de las 9 monedas, se les ocurre hacer 3 grupos y dejar alguno de los grupos fuera de la balanza para ser examinado en el caso que en el primer experimento la balanza quede en equilibrio. No todos dividen el grupo de monedas en subgrupos iguales. Hay algunos que pesan 5 contra 5 y dejan fuera 2. O pesan 3 contra 3 y dejan fuera 6 considerando que si en la primera pesada la balanza se equilibra, pueden eliminar las 6 monedas pesadas y en el segundo experimento pesar 3 contra 3 de las 6 restantes. Los más listos no tardan demasiado en descubrir que una buena alternativa es pesar 4 contra 4 en el primer experimento y dejar fuera 4, es decir, formar tres grupos con iguales cantidades de monedas.

Éstos se dan cuenta que la clave del asunto es llevar el conteo de las posibilidades que se van eliminando y de las puntas del árbol diagnóstico que se muestra esquemáticamente en la figura 3.

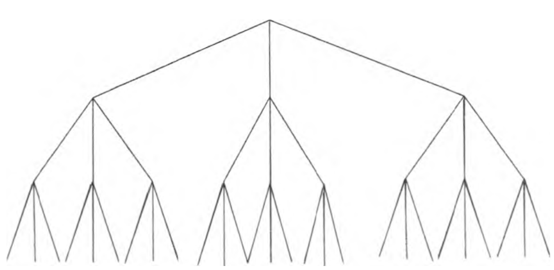

Figura 3

Recordamos que las posibilidades son 24, a saber: 1P, 1L, 2P, 2L, ... , 12P, 12L. Por otra parte, de cada experimento salen 3 puntas, por lo que el árbol con tres experimentos sucesivos tiene $3^3 = 27$ puntas. Si el problema se resuelve satisfactoriamente, al final de las puntas en cuadrados similares a los que aparecen en las figuras 1 y 2, se deberían poner las 24 alternativas. Notamos que sobran 3 puntas. Posiblemente, como sucedió en el problema de las 8 monedas, algunas de las puntas correspondan a resultados imposibles.

Para que la estrategia de solución tenga éxito es importante no perder puntas del árbol. Por ejemplo, al reconocer que pesar 6 monedas contra 6 en el primer experimento sí ofrece información, también es conveniente notar que dicho experimento pierde 9 de las puntas finales, pues no hay la oportunidad de que en el primer experimento la balanza quede en equilibrio, por lo que se pierde la rama central del inicio del árbol diagnóstico. Esta aseveración es una demostración matemática de que no puede tener éxito una estrategia que comienza por pesar 6 monedas contra 6; razón por la que cuando se reta a una audiencia a resolver este problema (que tiene muchas posibles soluciones), posiblemente una persona cree que ya tiene una solución, la cual comienza pesando 6 monedas contra 6. Es seguro que su solución no es correcta. La mejor manera de descubrir el error es analizando las posibilidades que se van eliminando y las puntas restantes del árbol.

Pasemos ahora a examinar otras posibles primeras etapas de estrategias de solución. Supóngase que se inicia pesando 3 monedas contra 3, dejando 6 fuera. En el caso de que la balanza se equilibre en la primera etapa, quedarán, en la rama central del inicio del árbol, 12 posibilidades que corresponden a las monedas que quedaron fuera, cada una de las cuales puede ser pesada o ligera. Como el resto del árbol de tres etapas solamente tiene 9 puntas, ya no es posible separar las 12 posibilidades de a una por rama final, por lo que no es posible resolver el problema completamente. Con más razón, no es posible obtener una solución completa si se comienza pesando 2 contra 2 monedas porque en caso de que la balanza se equilibre serán 16 posibilidades las que hay que determinar (correspondientes a las posibilidades pesada y ligera para cada una de las ocho monedas que quedaron fuera de la primera pesada) con un subárbol que solamente tiene 9 puntas. Peor aún es la situación si se comienza pesando una moneda contra

DOI: http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2002.03n2.009

otra. En caso de que la balanza se equilibre (situación muy probable a menos que tengamos la fenomenal suerte de escoger para la primera pesada a la moneda falsa) quedarán 20 posibilidades por determinar con un subárbol diagnóstico de 9 puntas. Finalmente, analizemos la situación si se comienza pesando 5 contra 5 monedas. Si la balanza se equilibra estamos de suerte porque entonces la moneda defectuosa está entre las dos que quedaron fuera en la primera pesada y con facilidad determinaríamos en dos pesadas más cuál es la moneda falsa y si es pesada o ligera. Sin embargo, esta alternativa falla en el caso de que la balanza se desequilibre en la primera pesada, pues lo único que se podría concluir es que las posibilidades que quedan son que cualquiera de las 5 monedas cuyo plato bajó podrían ser pesadas y cualquiera de las 5 monedas cuyo plato subió podrían ser ligeras. Esto nos da 10 posibilidades, las cuales no se podrán separar totalmente con un subárbol de 9 puntas (aunque tendremos que reconocer que quedamos muy cerca de hacerlo).

Habiendo demostrado rigurosamente que ninguna estrategia que comience pesando 1 contra 1; 2 contra 2; 3 contra 3; 5 contra 5; y 6 contra 6 es capaz de resolver completamente el problema, nos queda solamente la alternativa de comenzar pesando 4 contra 4. Esta alternativa la examinaremos a continuación:

Si se pesan 4 contra 4 monedas, dejando 4 monedas fuera y se equilibra la balanza, entonces podemos concluir que las 8 monedas que se pusieron en los platos de la balanza son buenas. Las posibilidades que quedan son 8 correspondientes a cada una de las 4 monedas que quedaron fuera, cada una con dos posibilidades: pesada o ligera. Como el subárbol de dos etapas correspondiente a los dos experimentos restantes tiene 9 puntas, hay la esperanza de que se puedan separar las 8 posibilidades. (Como veremos más adelante, esta esperanza se convierte en una realidad una vez que deducimos una estrategia adecuada para hacerlo). Por otra parte, si en el primer experimento la balanza se desequilibra, podemos eliminar las posibilidades de que las monedas que están en el plato que subió sean pesadas y las posibilidades de que las monedas que están en el plato que bajó sean ligeras. Esto nos deja 8 posibilidades activas. Cualquiera de las 4 monedas en el plato que bajó pueden ser pesadas y cualquiera de las 4 monedas en el plato que subió pueden ser ligeras. Como el subárbol que corresponde a las dos etapas restantes tiene 9 puntas y hay 8 posibilidades a determinar, entonces existe la esperanza de que lo podamos hacer. (Posteriormente mostramos que también esta esperanza se convierte en realidad). El argumento deja viva la estrategia que comienza pesando 4 monedas contra 4. Ahora resta encontrar una estrategia que efectivamente separe las 8 posibilidades restantes en cada una de las tres ramas que parten del inicio del árbol completo en las dos pesadas que nos quedan. (En términos matemáticos hemos demostrado que la estrategia de comenzar pesando 4 monedas contra 4, dejando 4 monedas fuera, es necesaria. Todavía tenemos que demostrar que es suficiente).

Analicemos la rama central del árbol que corresponde a que en el primer experimento se equilibre la balanza. Si se numeran las monedas y se ponen en el plato izquierdo las monedas 1, 2, 3 y 4 y en el derecho las 5, 6, 7 y 8, sabemos que las monedas 1 a 8 son buenas. Las posibilidades que quedan son 9P, 9L, 10P, 10L, 11P, 11L, 12P, 12L. Debemos hacer las cosas de tal manera que en cada punta de la segunda etapa del subárbol de la rama central no queden más de 3 posibilidades para que en la última etapa cuyo subárbol tiene 3 puntas las podamos separar. Por ejemplo, si el segundo experimento consistiera en pesar las monedas 9 y 10 en el plato izquierdo contra 11 y 12 en el plato derecho, y el plato izquierdo bajara, quedarían las siguientes posibilidades: 9P, 10P, 11L, 12L. Estas cuatro posibilidades no se pueden separar en una pesada más que tiene tres puntas. Por lo tanto, este experimento no es adecuado. Igualmente si pesáramos la moneda 9 en el plato izquierdo contra la moneda 10 en el derecho y la balanza se equilibrase, entonces las posibilidades restantes serían 11P, 11L, 12P, 12L. Nuevamente se tienen cuatro posibilidades imposibles de separar con un subárbol de 3 puntas. Queda todavía la posibilidad de poner las monedas 9 y 10 en el plato izquierdo y la moneda 11 más alguna de las buenas como la 1 en el plato derecho, y dejar fuera la moneda 12. En ese caso, si la balanza se equilibra podemos deducir que 9, 10 y 11 son

DOI: http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2002.03n2.009

monedas buenas y las posibilidades restantes son 12P, 12L. Como son dos posibilidades, se pueden separar en una última pesada cuyo subárbol tiene 3 puntas. Simplemente se pesan 12 en el plato izquierdo contra una moneda buena como la 1 en el plato derecho. En caso que el plato izquierdo baje, entonces la moneda 12 es pesada. En caso de que el plato izquierdo suba, entonces la moneda 12 es ligera. Queda por analizar el caso del segundo experimento (monedas 9 y 10 en el plato izquierdo contra monedas 11 y 1 en el derecho) en donde la balanza se desequilibre. Supongamos que el plato izquierdo baje. Esto se puede deber a alguna de las siguientes posibilidades: 9P, 10P, 11L. Si en cambio, el plato izquierdo sube, entonces las posibilidades son 9L, 10L, 11P. En ambos casos solamente quedan tres posibilidades para un subárbol con tres puntas. La situación se puede resolver para el caso en que el plato izquierdo baje pesando la moneda 9 en el plato izquierdo, contra la 10 en el plato derecho, y dejando fuera la moneda 11 que en este caso solamente puede ser ligera. Si la balanza se equilibra deducimos que la moneda 11 es ligera. Si baja el plato izquierdo deducimos que la moneda 9 es pesada. Si baja el plato derecho deducimos que la moneda 10 es pesada. El caso en que el plato derecho sea el que baje en el segundo experimento se resuelve de manera análoga. Resumimos el análisis de la rama central del árbol con la figura 4. Junto a cada rama, cruzándola, aparecen subrayadas las posibilidades pendientes de determinación.

En las puntas inferiores están marcadas con negritas las monedas y sus defectos. Las monedas que intervienen en cada experimento aparecen en las correspondientes trifurcaciones en cursivas, mostrando del lado izquierdo de la trifurcación las monedas que se ponen en el plato izquierdo y en el lado derecho las que se ponen en el plato derecho. Las ramas del árbol del lado izquierdo de las trifurcaciones, corresponden al resultado del experimento en que el plato izquierdo baja. La rama central corresponde a la balanza equilibrada y las ramas derechas corresponden al resultado en que el plato derecho baja. La porción mostrada del árbol nos indica que el primer experimento consiste en poner las monedas 1,2,3,4 en el plato izquierdo y las monedas 5,6,7,8 en el plato derecho. (Las monedas 9,10,11,12 quedan fuera). Si la balanza se equilibra en el primer experimento, entonces se ponen las monedas 9,10 en el plato izquierdo y las monedas 11,1 en el derecho. Si en el segundo experimento la balanza se equilibra, entonces en el tercer experimento se pone la moneda 12 en el plato izquierdo y 1 en el plato derecho. En forma análoga se interpretan las demás ramas del árbol.

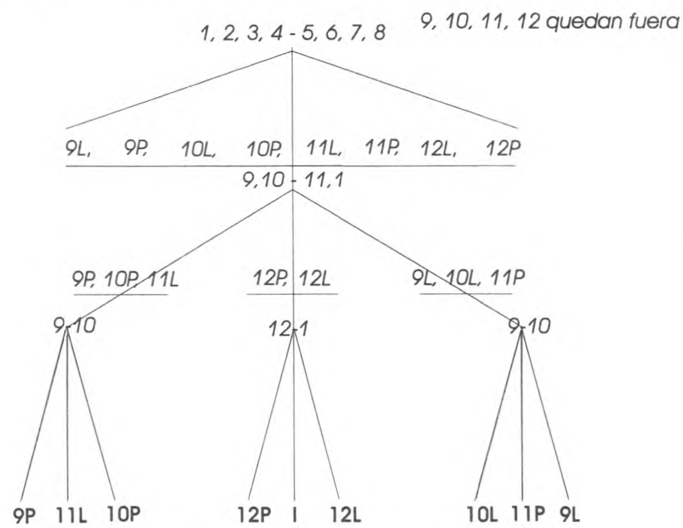

Figura 4

Analizemos ahora el caso en que en el primer experimento la balanza se desequilibra. Esta es la situación que más trabajo les cuesta a la mayor parte de los estudiantes. El secreto del análisis es llevar cuenta de las posibilidades que quedan y diseñar los experimentos de manera que las puntas de los subárboles sean suficientes para separar dichas posibilidades. Cuando en el primer experimento (pesar monedas 1,2,3,4 en el plato izquierdo contra 5,6,7,8 en el derecho) el plato izquierdo es el que baja, podemos concluir que las únicas posibilidades de que esto suceda son las siguientes: 1P, 2P, 3P, 4P, 5L, 6L, 7L, 8L. Tendremos ahora que diseñar un experimento tal que en cada punta de la primera etapa del subárbol no queden más de 3 posibilidades para poder separarlas en el último experimento que tiene tres puntas por cada punta del segundo experimento. Un punto clave es no olvidar que debemos dar la oportunidad de que en el segundo experimento la balanza quede en equilibrio, de otra manera, se estarían desperdiciando 3 de las puntas finales. La balanza queda en equilibrio cuando la moneda falsa no está colocada en

DOI: http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2002.03n2.009

ninguno de los platos de la misma, es decir, cuando la moneda falsa está entre las monedas que se dejan fuera de la pesada. Por lo dicho, parece una buena idea dejar fuera del segundo experimento la pesada de tres de las monedas sospechosas. Digamos 6,7,8. Debemos entonces incluir en el experimento a las monedas 1,2,3,4,5. Por ser impar, se debe incluir una de las monedas que ya se sabe son buenas en el caso de que en el primer experimento la balanza se desequilibre, por ejemplo la moneda 12. Si diseñamos la pesada del segundo experimento sin el debido cuidado, saldrá alguna punta de la primera etapa del subárbol con más de tres puntas. Por ejemplo, si se pesaran las monedas 1,2,3 en el plato izquierdo contra 4,5,12 en el plato derecho, y el plato izquierdo bajase, quedarían las posibilidades 1P, 2P, 3P, 5L, las cuales no se podrían separar con un subárbol de 3 puntas. Por lo tanto, es necesario que en el plato izquierdo pongamos una mezcla de monedas posiblemente pesadas y posiblemente ligeras. Por ejemplo, si pesamos 1,2,5 en el plato izquierdo contra 3,4,12 en el plato derecho y el plato izquierdo bajara, las posibilidades restantes serían 1P, 2P. Por ser sólo 2, fácilmente en el tercer experimento se pueden separar, pesando 1 en el plato izquierdo contra 2 en el plato derecho, el plato que baje es el que contiene la moneda pesada. La balanza no se puede equilibrar porque ya solamente quedan las posibilidades 1P, 2P, por lo que la punta correspondiente a una balanza equilibrada la deberíamos de marcar con I de imposible. Si por otra parte, en el segundo experimento, el plato derecho es el que baja, entonces las posibilidades restantes serían: 3P, 4P, 5L que al ser tres podemos separar en el tercer experimento pesando 3 en el plato izquierdo contra 4 en el plato derecho y dejando fuera la moneda 5. Si la balanza se equilibra entonces la moneda falsa es la 5 y es ligera. Si el plato izquierdo baja, entonces se trata de 3P. Si el plato derecho baja, se trata de 4P. Finalmente, si en el segundo experimento la balanza se equilibra, como se han dejado fuera de la pesada las monedas 6,7,8 las cuales son posiblemente ligeras, podemos separar estas tres posibilidades pesando la moneda 6 en el plato izquierdo contra 7 en el derecho. Si la balanza queda en equilibrio, la moneda falsa es la 8 y es ligera. Si el plato izquierdo baja, la moneda falsa es la 7 y es ligera; y si el plato derecho baja, entonces la moneda falsa es la 6 y es ligera.

Hemos logrado diseñar una estrategia que resuelve por completo la rama izquierda que parte del principio de todo el árbol. La rama derecha presenta un problema simétrico, por lo que no se detallará, dejando su solución al lector. La solución completa al problema de las 12 monedas queda representada esquemáticamente en la figura 5. Nótese la presencia de tres resultados finales marcados con I que representan situaciones imposibles, dado el conocimiento de que una de las monedas es falsa. Junto a cada rama del árbol aparecen subrayadas las posibles monedas falsas y sus defectos.

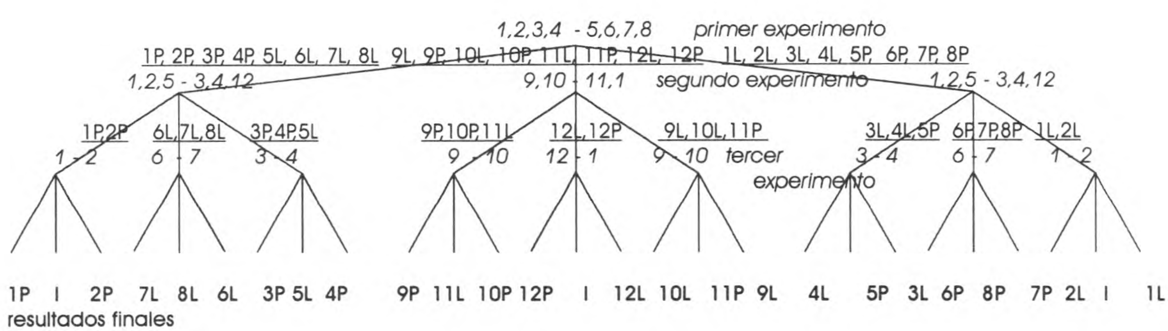

Figura 5

DOI: http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2002.03n2.009

Una pequeña complicación adicional: 13 monedas con una testigo

Al resolver el problema de las 12 monedas vamos ahora a complicar un poco el problema añadiendo una moneda más y dejando la posibilidad de que una moneda sea falsa o ninguna. Sin embargo, vamos a proveer una moneda testigo, es decir, una moneda que sabemos que es buena. El problema es ahora determinar en tres pesadas cuál de 13 monedas (o ninguna) es falsa y su defecto (si es pesada o ligera). Tenemos acceso a una moneda adicional llamada B que es buena. Vamos a resolver el problema aprovechando las puntas que en la figura 5 aparecen marcadas con I, por ser imposibles bajo las hipótesis del problema de las 12 monedas. Como se tienen 27 posibilidades, a saber: cada una de las 13 monedas puede ser pesada o ligera (26 posibilidades) y posiblemente ninguna de las monedas es falsa (posibilidad 27), tenemos que aprovechar todas las puntas del árbol. Debemos dividir las monedas en 3 grupos. En los dos primeros grupos debemos tener 9 monedas sospechosas que al desequilibrar la balanza deje 18 posibilidades que corresponden a las 18 puntas finales del árbol de la figura 5 de las ramas izquierda y derecha que parten del inicio del árbol. En el tercer grupo, que dejaremos fuera de la primera pesada, pondremos 4 monedas que corresponden a 8 posibilidades y la posibilidad de que ninguna de las monedas sea falsa ocupará la novena punta final de la rama central del árbol de la figura 5. Como en los primeros dos grupos tenemos un número impar de monedas y necesitamos poner igual número de monedas en cada plato, utilizamos aquí la moneda testigo B. Por lo tanto, en el primer experimento pesamos las monedas 1,2,3,4,5 en el plato izquierdo y 6,7,8,9,B en el plato derecho. Si el plato izquierdo baja, las 9 posibilidades son 1P, 2P, 3P, 4P, 5P, 6L, 7L, 8L, 9L . Si el plato derecho es el que baja, entonces las 9 posibilidades son 1L, 2L, 3L, 4L, 5L, 6P, 7P, 8P, 9P. Si la balanza se equilibra en el primer experimento tendremos como posibilidades 10P, 10L, 11P, 11L, 12P, 12L, 13P, 13L, T. Donde con T se ha designado la posibilidad de que todas las monedas sean buenas. Se han repartido en cada rama que parte del inicio del árbol 9 posibilidades, para igual número de puntas de los subárboles correspondientes.

Procedamos a diseñar el segundo experimento para la rama central correspondiente a la situación en que en el primer experimento la balanza queda equilibrada. La situación es muy parecida al problema de las 12 monedas pues tenemos cuatro monedas en duda. Usando la misma estrategia, el segundo experimento para la rama central del árbol es pesar las monedas 10, 11 en el plato izquierdo, contra 12, B en el plato derecho, dejando la moneda 13 fuera de la pesada. Si la balanza queda en equilibrio, solamente la moneda 13 es sospechosa y en el tercer experimento la pesamos contra B. En dicho experimento, si 13 baja, entonces es falsa y pesada. Si 13 sube, entonces es falsa y ligera. Si la balanza queda en equilibrio, tenemos la situación T, es decir, todas las monedas son buenas. Por otra parte, si en el segundo experimento el plato izquierdo baja entonces las posibilidades que restan son 10P, 11P, 12L y la situación se resuelve en el tercer experimento, pesando 10 en el plato izquierdo contra 11 en el plato derecho. La moneda que baje es falsa y pesada. Si la balanza queda en equilibrio, entonces la moneda falsa es la 12 y es ligera. Finalmente, si el plato derecho es el que baja en el segundo experimento las posibilidades son 10L, 11L, 12P, situación que se resuelve en el tercer experimento, pesando la moneda 10 en el plato izquierdo contra la 11 en el derecho. Si la balanza queda en equilibrio la moneda falsa es la 12 y es pesada. Si el plato izquierdo baja, entonces la moneda falsa es la 11 y es ligera y si el plato derecho es el que baja, entonces la moneda falsa es la 10 y es ligera.

Ahora diseñaremos los experimentos de la rama izquierda que parte del inicio del árbol diagnóstico. Dicha rama corresponde a que el plato izquierdo baje en el primer experimento. Las posibilidades cuando esto sucede son: 1P, 2P, 3P, 4P, 5P, 6L, 7L, 8L, 9L. Como la balanza ya se desequilibró y no hay más de una moneda falsa, en este punto sabemos que las monedas 10, 11, 12, 13 son buenas. Dejemos fuera del segundo experimento las monedas 7,8, y 9. La única moneda posiblemente ligera que entra será la 6. El experimento en el que pesamos las monedas 1,2,3,6 en el plato izquierdo contra 4,5,B,13 en el derecho, en el cual sabemos de antemano que B y

DOI: http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2002.03n2.009

13 son buenas, deja a lo más tres posibilidades para cada estado de la balanza. Si se equilibra, las posibilidades son las que dejamos fuera, a saber: 7L, 8L, 9L. Si el plato izquierdo baja, las posibilidades son: 1P, 2P, 3P. Si el plato derecho baja, entonces las posibilidades son: 6L, 4P, 5P. Los últimos tres experimentos que las separan son los siguientes: Balanza Equilibrada, pesar 7 en el plato izquierdo contra 8 en el derecho; Plato Izquierdo Baja, pesar 1 en el plato izquierdo contra 2 en el derecho; Plato Derecho Baja, pesar 4 en el plato izquierdo contra 5 en el derecho. Un resumen de los experimentos y los resultados finales aparecen en el árbol diagnóstico de la figura 6.

Generalización del problema de las 9 monedas

El problema de las 9 monedas se puede generalizar a otras cantidades si estamos dispuestos admitir un mayor número de pesadas. Ya vimos que si se reduce el número de monedas, el problema se puede resolver con la misma estrategia y con igual cantidad de pesadas (se hizo para el caso de 8 monedas). Con un número mayor de pesadas se puede determinar la falsa entre un número mayor de monedas. En particular, vamos a demostrar que se puede determinar la moneda falsa que pesa más que las normales de entre 3^N monedas en N pesadas con una balanza de comparación. Anteriormente resolvimos en detalle el caso de $3^2 = 9$ monedas en dos pesadas. Se seguirá una estrategia muy similar a la utilizada para resolver el problema de 9 monedas para solucionar el problema de 3^N monedas. La demostración utiliza la inducción matemática que dice: *Si una aseveración que depende de un parámetro entero positivo* N *es cierta para* $N = K$ *y además si el suponerla cierta para* $N - 1$ *implica que es cierta para* N, *entonces la aseveración es cierta para todos los números enteros positivos* $N \geq K$. *En particular si* $K = 1$, *entonces es cierta para todos los números enteros positivos* .

Comenzamos por demostrar que es cierto que una moneda falsa de entre $3^1 = 3$ que pesa más que las normales se puede determinar con una pesada en una balanza de comparación. Se dividen las tres monedas en tres grupos (cada grupo tendrá una sola moneda). Llamémosles a los grupos 1, 2 y 3. Pesemos el grupo 1 en el plato izquierdo contra el 2 en el plato derecho. Si la balanza permanece en equilibrio la moneda del grupo 3 es la falsa. Si el plato izquierdo baja, entonces la moneda del grupo 1 es la falsa. Si el plato derecho baja, entonces la moneda del grupo 2 es la falsa.

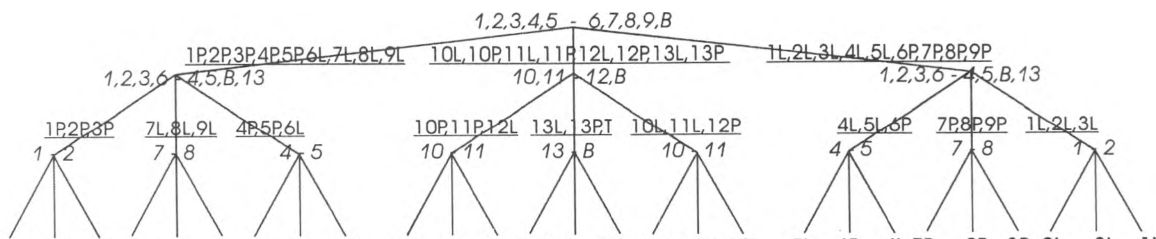

Figura 6

DOI: http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2002.03n2.009

Vamos ahora a suponer que es cierto que tenemos una estrategia válida para determinar entre 3^{N-1} monedas cuál es la falsa, porque pesa más, en N–1 pesadas con una balanza de comparación. Vamos a demostrar que esta suposición implica que podemos determinar de entre 3^N monedas cual es la falsa en N pesadas con una balanza de comparación. Dividimos el conjunto total de 3^N monedas en tres grupos cada uno, conteniendo, 3^{N-1} monedas. Llamemos a los grupos 1, 2 y 3. Dejamos fuera el grupo 3 y pesamos en el plato izquierdo el grupo 1 contra el grupo 2 en el plato derecho. Si la balanza se equilibra, la moneda falsa está en el grupo 3. Si el plato izquierdo baja, la moneda falsa está en el grupo 1. Si el plato derecho baja, la moneda falsa está en el grupo 2. Para conseguir esta información se ha utilizado una pesada. Con las N – 1 pesadas que restan aplicadas a las 3^{N-1} monedas del grupo en el cual se determinó que está la moneda falsa, se determina cuál de ellas es la falsa, cosa que se logra por hipótesis. Por lo tanto, se puede determinar la moneda falsa que pesa más que las normales de entre 3^N monedas en N pesadas, con la estrategia descrita. Debe quedar claro que si en vez de saber que la moneda falsa es más pesada que las normales, lo que se sabe es que es más ligera, un procedimiento completamente análogo, fijándose en vez de cuál plato baja, cuál sube, determinaría en N pesadas cual es la falsa entre 3^N monedas. Este resultado va a ser útil en la solución de la generalización del problema de las 13 monedas.

Generalización del problema de las 13 monedas

El problema de las 13 monedas, una o ninguna de las cuales es falsa, pesando más, menos, o igual que las normales, y la cual hay que determinar en 3 pesadas con una balanza de comparación, estando disponible una moneda testigo buena, es un caso particular para N = 3 del siguiente problema: se tienen $(3^N - 1)/2$ monedas, una o ninguna de las cuales es falsa pesando más, menos (o igual que las normales, para el caso de que ninguna sea falsa). Determinar en N pesadas cuál de ellas es la falsa y su defecto o, en su caso, si ninguna de ellas es falsa. Se cuenta con una moneda testigo adicional buena. Este problema ha sido resuelto en detalle anteriormente para el caso N = 3, $(3^N - 1)/2 = (27 - 1)/2 = 13$.

Para familiarizarnos con el problema vamos a comenzar por resolver el caso N = 2. En este caso se trata de $(3^2 - 1)/2 = 4$ monedas y hay que determinar la falsa (o decir si ninguna es falsa) en dos pesadas. Se cuenta con una moneda adicional testigo buena. Este problema ya se nos ha presentado antes durante el análisis de la rama central en la solución del problema de las 12 monedas. La solución que encontramos ahí (adaptada a la numeración 1,2,3,4 para las monedas y B para la testigo) fue comenzar pesando en el plato izquierdo las monedas 1,2 y en el derecho 3,B dejando la moneda 4 fuera. Este experimento nos deja 3 posibilidades pendientes para cada estado de la balanza. Si el plato izquierdo baja, las posibilidades son: 1P, 2P, 3L. Si el plato derecho baja entonces las posibilidades son: 1L, 2L, 3P. Si la balanza se equilibra, las posibilidades son: 4P, 4L, T , donde con T denotamos el caso en que todas las monedas son buenas. La determinación del resultado final se hace de la siguiente manera: cuando en el primer experimento el plato izquierdo baja, se pesa la moneda 1 en el plato izquierdo contra la moneda 2 en el plato derecho. El plato que baje tiene la moneda falsa que es pesada. Si la balanza se equilibra, la moneda falsa es la 3 y es ligera (por ser la posibilidad que se dejó fuera del experimento). Si el plato derecho es el que baja, se pesan las monedas 1 en el plato izquierdo contra la 2 en el derecho y se deja fuera la 3. Si la balanza se equilibra la moneda falsa es la que quedó fuera, o sea la 3, y es pesada. Si la balanza se desequilibra, la moneda que está en el plato que sube es la falsa y es ligera. El árbol diagnóstico correspondiente se puede tomar de la figura 4 considerando los dos más bajos niveles de trifurcación y sustituyendo las monedas 1,2,3,4,B por las 9,10,11,12,1, respectivamente.

Observamos las siguientes características de los casos N = 2 (4 monedas en dos pesadas) y N = 3 (13 monedas en tres pesadas).

1. Todas las 3^N puntas del árbol diagnóstico están ocupadas con distintas posibilidades.

DOI: http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2002.03n2.009

Una de ellas que corresponde a N veces que la balanza quedó en equilibrio es la posibilidad T. Las demás con $(3^N - 1)$ posibilidades de monedas falsas, la mitad ligeras y la mitad pesadas. (Nótese que $3^N - 1$ es un número par, por lo que tiene mitad entera).

2. Los árboles diagnósticos se pueden construir de manera que tengan simetría axial respecto a la secuencia de ramas intermedias en las que siempre se equilibra la balanza.

3. En el primer experimento las cosas se pueden arreglar de manera que en el plato derecho vaya la moneda testigo, por lo que la rama izquierda que parte del primer experimento tendrá una posibilidad más de ser pesada que las posibilidades ligeras. El número de posibilidades asociadas con esa rama izquierda será un número impar que vale 3^{N-1}.

4. Para la rama izquierda del árbol diagnóstico en el segundo experimento, siempre se pueden dejar fuera del mismo monedas exclusivamente ligeras. Estas monedas son las que aparecerán en la rama central del segundo experimento de la rama izquierda. El número de monedas que se dejan fuera en este segundo experimento es 3^{N-2}. Como vimos en la sección anterior, sabiendo su defecto (todas posiblemente ligeras), se puede determinar la falsa en N–2 pesadas.

5. El segundo experimento siempre se puede diseñar de manera que todas las 3^{N-2} posibilidades de la rama izquierda que parten de dicho experimento sean posiblemente monedas pesadas, por lo que la moneda falsa se podrá determinar en N–2 pesadas por lo deducido en la sección anterior.

6. La rama derecha que parte del segundo experimento, se puede arreglar a manera de mezcla de posibilidades de monedas ligeras y pesadas, siendo el número truncado a entero positivo de $3^{N-2}/2$ ligeras y el mismo número mas uno, pesadas.

Antes de proporcionar una demostración por inducción de la estrategia general, resolveremos el problema para N=4 y $(3^4 - 1)/2 = 40$ monedas, revisando que estas características se cumplan.

Comenzamos por dividir las monedas en tres grupos de 14, 13 y 13 monedas llamándolos 1, 2 y 3. Pesamos en el primer experimento 14 monedas del grupo 1 en el plato izquierdo contra 13 monedas del segundo grupo y B (moneda testigo) en el plato derecho. Si la balanza permanece en equilibrio, la posiblemente falsa (o la posibilidad de que todas sean buenas) está en el grupo 3. Como se trata de 13 monedas y todavía se tienen 3 pesadas para descubrir la falsa (o determinar que todas son buenas), se puede aplicar la solución al problema de las 13 monedas que se detalló antes. Si el plato izquierdo baja en el primer experimento, entonces se tienen las siguientes posibilidades (numerando las monedas como sigue: 1 a 14 las del primer grupo, 15 a 27 las del segundo grupo y 28 a 40 las del tercer grupo): 1P, 2P, ..., 14P, 15L, 16L, ..., 27L. Un total de 27 posibilidades para un subárbol diagnóstico de tres etapas con 27 puntas exactamente. En el segundo experimento de la rama izquierda podemos dejar fuera las 9 monedas posiblemente ligeras 19,20, ..., 27. Éstas se pueden determinar en caso de que en el segundo experimento la balanza se equilibre con la estrategia para determinar una moneda ligera de 9 en dos pesadas, usando la estrategia para resolver el problema de las 9 monedas y adaptándola para que las monedas falsas sean ligeras en vez de pesadas. De las monedas que entran en el segundo experimento ponemos en el plato izquierdo las posiblemente pesadas 1,2,...,9 y las posiblemente ligeras 15,16,17,18. En el plato derecho ponemos el resto de las posiblemente pesadas 10,11,12,13,14 y para que haya igual número de monedas en los dos platos, completamos con 8 monedas buenas (una de ellas puede ser la testigo) que las podemos tomar de entre las que quedaron fuera en el primer experimento. (Hay suficientes, pues en el primer experimento dejamos fuera 13 monedas). Un análisis de las posibilidades en el caso de los tres posibles estados de la balanza arroja lo siguiente: si la balanza se equilibra, el caso ya fue discutido antes; si el plato izquierdo baja, las 9 posibilidades son 1P,2P,...,9P, que se pueden separar en dos pesadas más con la técnica de solución del problema de las nueve monedas; si el plato

DOI: http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2002.03n2.009

derecho baja, las 9 posibilidades son 10P, 11P, 12P, 13P, 14P, 15L, 16L, 17L, 18L. Éstas últimas se pueden separar en tres grupos de tres posibilidades cada uno con el experimento de pesar en el plato izquierdo las monedas 10,11,12,15 contra 13,14, y dos buenas y dejar fuera del experimento las monedas posiblemente ligeras 16,17,18. Si en este tercer experimento el plato izquierdo baja las posibilidades son 10P, 11P, 12P que fácilmente se separan en una pesada más; si el plato derecho baja, las posibilidades son 13P, 14P, 15L que también se separan en una pesada más; finalmente, si la balanza se equilibra las posibilidades son 16L, 17L, 18L que en una pesada más se separan fácilmente. La rama derecha que parte del inicio del árbol diagnóstico se resuelve de manera análoga cambiando P's por L's con los mismos experimentos, esto nos da un árbol diagnóstico simétrico, por lo que se cumple el punto 2 arriba. Aunque no hemos dibujado el árbol en detalle, es fácil ver que todas las puntas estarán ocupadas con las 80 posibilidades de monedas pesadas y ligeras, y la posibilidad T, que todas sean buenas. Con esto se satisface el punto 1. El punto 3 se satisface con el primer experimento en el que se puso la moneda B en el plato derecho. Como hubo 14 posibilidades pesadas en la rama izquierda que parte del primer experimento y 13 posibilidades ligeras, esta parte de la condición del punto 3 también se cumple. También se cumple para el punto 3 que el total de posibilidades es $14+13=27=3^{N-1}=3^3$. El punto 4 se cumple porque se dejan fuera del segundo experimento $9=3^{N-2}=3^2$ monedas pesadas. El punto 5 se cumple porque la rama izquierda del segundo experimento genera posibilidades de puras monedas pesadas y son $9=3^{N-2}=3^2$ posibilidades. El punto 6 se cumple porque las posibilidades de la rama derecha del segundo experimento son una mezcla de

$5 = \mathrm{TRUNC}(3^{N-2}/2)+1 = \mathrm{TRUNC}(4.5)+1$ pesadas y
$4 = \mathrm{TRUNC}(3^{N-2}/2) = \mathrm{TRUNC}(4.5)$ ligeras

Hemos resuelto el problema de 40 monedas en 4 pesadas. Ahora con la experiencia adquirida trataremos de resolver el problema para cualquier N. Supóngase que se tienen $M = (3^N - 1)/2$ monedas aparentemente iguales pero una o ninguna de las cuales es falsa, y pesa más, menos o igual que las normales. Además se cuenta con una moneda testigo buena. Hay que determinar una estrategia para, en N pesadas en una balanza de comparación, determinar cuál de las monedas (o ninguna) es falsa y qué defecto tiene (pesada o ligera).

La primera cosa que hay que hacer para resolver el problema, es dividir la M monedas en tres grupos aproximadamente iguales. Notamos lo siguiente: 3^N es un número impar, el cual es divisible exactamente entre 3; por ende $3^N - 1$ es un número par que al ser dividido entre 3 deja un resto de 2; por lo tanto, $M = (3^N - 1)/2$ es un número entero que al ser dividido entre 3 deja un resto de 1. Esto significa que podemos dividir las M monedas en dos grupos de TRUNC(M/3) monedas cada uno y uno de TRUNC(M/3) + 1 monedas. Donde TRUNC es la función que trunca la parte decimal si existiere de su argumento. Al grupo de monedas más grande le llamamos 1 y a los otros dos del mismo tamaño les llamamos 2 y 3. En el primer experimento pesamos el grupo 1 de monedas en el plato izquierdo y el grupo 2 más la moneda testigo en el plato derecho, dejaremos el grupo 3 fuera del experimento. Con este experimento iniciamos un árbol diagnóstico del cual parten 3 ramas. Cada una de las ramas que corresponden a los tres estados posibles de la balanza (plato izquierdo baja, plato derecho baja, la balanza queda equilibrada) deja como posibles $(2M + 1)/3 = 3^{N-1}$ alternativas. La rama izquierda deja las siguientes alternativas: cualquiera de las TRUNC(M/3) + 1 monedas colocadas en el plato izquierdo (grupo 1) puede ser pesada y cualquiera de las TRUNC(M/3) monedas colocadas en el plato derecho (grupo 2) puede ser ligera. La rama derecha deja las siguientes alternativas: cualquiera de las monedas del grupo 1 puede ser ligera y cualquiera de las monedas del grupo 2 puede ser pesada. La rama central deja las siguientes alternativas: cualquiera de las monedas del grupo 3 puede ser pesada o ligera y posiblemente todas las monedas son buenas. La estrategia para resolver el problema se basa en diseñar el segundo experimento de manera que en cada rama del subárbol que sale de él queden 3^{N-2} alternativas posibles. Esto se logra diseñando el segundo experimento de la siguiente manera:

DOI: http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2002.03n2.009

Se calcula 3^{-2} y se dejan fuera del segundo experimento esa cantidad de monedas, tomadas del segundo grupo, y además se colocan en el plato izquierdo esa cantidad de monedas tomadas del primer grupo. Debe haber suficientes, ya que TRUNC$\{(3^N - 1)/6)\} + 1 =$ TRUNC$(M/3) + 1$ es mayor que $3^{N-2} = (2M + 1)/9$ para cualquier valor entero positivo de $N \geq 2$. La siguiente tabla nos muestra la veracidad de la aseveración para los primeros valores de N

N	TRUNC(M/3)+1	$3^{N-2}=(2M+1)/9$
2	2	1
3	5	3
4	14	9
5	41	27
6	122	81
7	365	243
8	1094	729
9	3281	2187
10	9842	6561
11	29525	19683
12	88574	59049
13	265721	177147
14	797162	531441
15	2391485	1594323

Asintóticamente se ve que para valores grandes de M (y por tanto de N) las dos funciones crecen aproximadamente lineales con M, teniendo mayor pendiente la función de la columna central. En seguida, se colocan el resto de las monedas del primer grupo en el plato derecho. Se le agregan al plato izquierdo las monedas del segundo grupo que no quedaron fuera del experimento. Ahora se agregan suficientes monedas del tercer grupo (que ya se saben son buenas) al plato derecho de manera que en el plato derecho se tenga igual cantidad de monedas que en el plato izquierdo. Con este experimento, las posibilidades restantes en las tres ramas de la trifurcación que nace en el segundo experimento son como sigue: en la rama izquierda todas las 3^{N-2} monedas del primer grupo que están en el plato izquierdo son posibles pesadas; en la rama central todas las 3^{N-2} monedas que se dejaron fuera del experimento del segundo grupo son posibles ligeras; en la rama derecha TRUNC$(3^{N-2}/2)$ monedas son posiblemente ligeras y TRUNC$(3^{N-2}/2)$ + 1 son posiblemente pesadas. Para justificar esta última aseveración notamos que las 3^{N-1} posibilidades que pertenecen a la rama izquierda que parte del primer experimento se dividieron en el segundo en 3^{N-2} posibilidades para la rama izquierda del segundo experimento, 3^{N-2} posibilidades para la rama central y por diferencia 3^{N-2} posibilidades para la rama derecha. Como las posibilidades de la rama izquierda son todas pesadas y las de la rama central son todas ligeras, y en las 3^{N-1} posibilidades de la rama izquierda del primer experimento sobra una posibilidad pesada, en las posibilidades de la rama derecha del segundo experimento también debe sobrar una posibilidad pesada.

Ahora, echamos mano del argumento de la inducción matemática para indicar que la rama derecha del segundo experimento tiene 3^{N-2} (número impar) posibilidades en total, la mitad (truncada), de las cuales son ligeras y la mitad (truncada) más uno de las cuales son pesadas. Esto corresponde exactamente al problema de separación de posibilidades de la rama izquierda de un problema con $(3^{N-1} - 1)/2$ monedas cuya moneda falsa (o ninguna) hay que determinar en N−1 pesadas con una balanza de comparación cuando el primer experimento se diseña como se ha descrito arriba, situación que por hipótesis de la inducción suponemos resuelta. Las ramas izquierda y central del segundo experimento se resuelven del resultado de la generalización del problema de las 9 monedas, ya que en ambos casos todas las posibilidades son de la misma naturaleza (o todas pesadas o todas ligeras). Teniendo 3^{N-2} monedas en duda, la falsa se determina con N−2 pesadas, que son las que restan de las N disponibles después de hacer el primer y segundo experimento. Con esto hemos establecido el paso de N−1 a N para la rama derecha del árbol diagnóstico completo. La rama izquierda lleva un argumento totalmente análogo y no se describirá en detalle, solamente haremos el comentario de que los experimentos son los mismos y lo que de un

DOI: http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2002.03n2.009

lado son pesadas del otro son ligeras y viceversa. La rama central del árbol diagnóstico completo es un problema de orden N–1 idéntico en estructura al problema de orden N, por lo que suponemos por la hipótesis de la inducción matemática que se tiene resuelto. Por las discusiones preliminares en donde establecimos que la estrategia para N = 2, 3, 4 y el caso N = 1 se satisface trivialmente, y se ha completado el paso de N–1 a N de las tres ramas del árbol diagnóstico completo, se ha determinado por inducción matemática la validez de la estrategia descrita para todos los enteros positivos N.

Vamos a enunciar una vez más la estrategia:

De las $M = (3^N - 1)/2$ monedas, se forman tres grupos iguales, cada uno con TRUNC(M/3) monedas, sobrando una moneda que se le asigna al primer grupo. En el primer experimento se pesan las monedas del primer grupo en el plato izquierdo contra las del segundo grupo en el plato derecho, habiendo agregado al segundo grupo la moneda testigo B. Si la balanza se equilibra resolvemos con la estrategia para un número de monedas igual a $(3^{N-1} - 1)/2$ el problema para las monedas del tercer grupo. (Esto lo suponemos resuelto por la hipótesis de la inducción matemática). Si baja el plato izquierdo en el primer experimento diseñamos un segundo experimento de la siguiente manera: ponemos en el plato izquierdo 3^{N-2} monedas del primer grupo mas TRUNC(M/3) – 3^{N-2} monedas del segundo grupo. Dejamos fuera del experimento 3^{N-2} monedas del segundo grupo para ser analizadas en el caso de que en el segundo experimento la balanza se equilibre. En el plato derecho ponemos las monedas del primer grupo que no pusimos en el plato izquierdo y le agregamos suficientes monedas buenas para igualar las monedas en los dos platos. Si el plato izquierdo baja o la balanza se equilibra en el segundo experimento usamos la técnica para resolver el problema de monedas, todas con el mismo defecto. Si el plato derecho baja en el segundo experimento, entonces se aplica la técnica de diseño del segundo experimento, como si el primer grupo fueran las monedas que corresponden al antiguo primer grupo y que están en el plato derecho, y el segundo grupo fueran las monedas del antiguo segundo grupo que están en el plato izquierdo.

El siguiente paso sería programar en una computadora la estrategia descrita. Esta acción es muy importante desde el punto de vista educativo. Una demostración constructiva compleja como la que acabamos de mostrar, se clarifica si se le automatiza de modo que una computadora lleve a cabo las acciones descritas. Como profesor, cuando se le pide a un alumno que resuelva una familia de problemas y que automatice la solución en una computadora, si logra hacerlo con éxito, es porque ha entendido el problema profundamente y es capaz de abstraer las principales ideas y enseñárselas a una máquina. Todo el que tiene experiencia docente sabe que una manera eficaz de aprender un tema es estudiarlo para enseñarlo. El estudiante que programa, es decir, que le enseña a resolver una familia de problemas a una computadora, se apropia del conocimiento en uno de los niveles cognitivos más altos. No es el más alto, puesto que todavía es más alto el que corresponde a descubrir o crear nuevo conocimiento. Se ha desarrollado un programa en LogoWriter que automatiza la estrategia para resolver el problema restringido a N pesadas. Por falta de espacio no exhibimos su listado, pero vamos a mostrar una sesión con el programa, la cual comienza dando una breve explicación del problema de la moneda falsa y dejando que el usuario proporcione el número de pesadas permitidas. El programa comienza dando el número de monedas que se pueden manejar, posteriormente le plantea experimentos de pesadas en los que le informa qué monedas pone en cada plato y le pregunta qué pasa con la balanza. El usuario debe pensar en una moneda defectuosa y su defecto (o posiblemente la posibilidad de que todas las monedas sean buenas) y para esa posibilidad ir contestando cómo se comporta la balanza en cada experimento que propone el programa oprimiendo alguna de las tres teclas: i (baja el plato izquierdo o el fiel de la balanza se inclina hacia la izquierda), e (la balanza queda equilibrada), d (baja el plato derecho o el fiel de la balanza se inclina hacia la derecha). El programa diseña los experimentos de tal modo que después de las N contestaciones (donde N es el número de pesadas que escogió el usuario) que da el

DOI: http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2002.03n2.009

usuario, el programa le informa cuál fue la posibilidad que pensó. Por ejemplo, el usuario puede escoger 12 pesadas (que corresponden a 265720 monedas y piensa en que la moneda 1000 es ligera. El programa le propone al usuario un primer experimento y le pregunta cuál es el resultado. Con la contestación diseña el siguiente experimento y repite el proceso hasta completar 12 de ellos, punto en el cual, el programa informa al usuario cuál es la moneda defectuosa y qué defecto tiene. La contestación, naturalmente es compatible con los resultados de todos los experimentos. Por los experimentos que propone el programa se puede ver como va acorralando a la moneda 1000 e informa correctamente que es ligera.

Sesión con un programa de computadora con un número grande de monedas

Este programa resuelve el problema de la moneda falsa. Se tiene una cierta cantidad de monedas más una moneda testigo buena. Una (o ninguna) es falsa y puede pesar más o menos que las demás (no se sabe de antemano); hay que encontrar una estrategia para, en un cierto número de pesadas, dado por el usuario (con lo cual se determina el número máximo de monedas que se pueden manejar), determinar con una balanza de comparación de dos platillos cuál es la moneda falsa (o si todas son buenas) y además si dicha moneda pesa más o menos que las normales. Teclea, terminando con <RETORNO>, el número de pesadas que quieres que se permitan? **12**

Habrá **265720** monedas

Pongo las monedas **1** a **88574** en el plato izquierdo y las monedas **88575** a **177147** (más la moneda testigo buena) en el plato derecho y dejo fuera a las monedas **177148** a **265720.** ¿Para dónde se inclina el fiel de la balanza? (i, e, d) **d**

Pongo las monedas **1** a **59049** junto con las monedas **88575** a **118098** en el plato izquierdo y en el derecho pongo las monedas **59050** a **88574** junto con las monedas buenas **206673** a **265720.** ¿Para dónde se inclina el fiel de la balanza? (i, e, d) **d**

Pongo las monedas **1** a **19683** en el plato izquierdo y las monedas **19684** a **39366** en el plato derecho. ¿Para dónde se inclina el fiel de la balanza? (i, e, d) **d**

Pongo las monedas **1** a **6561** en el plato izquierdo y las monedas **6562** a **13122** en el plato derecho. ¿Para dónde se inclina el fiel de la balanza? (i, e, d) **d**

Pongo las monedas **1** a **2187** en el plato izquierdo y las monedas **2188** a **4374** en el plato derecho. ¿Para dónde se inclina el fiel de la balanza? (i, e, d) **d**

Pongo las monedas **1** a **729** en el plato izquierdo y las monedas **730** a **1458** en el plato derecho. ¿Para dónde se inclina el fiel de la balanza? (i, e, d) **i**

Pongo las monedas **730** a **972** en el plato izquierdo y las monedas **973** a **1215** en el plato derecho. ¿Para dónde se inclina el fiel de la balanza? (i, e, d) **i**

Pongo las monedas **973** a **1053** en el plato izquierdo y las monedas **1054** a **1134** en el plato derecho. ¿Para dónde se inclina el fiel de la balanza? (i, e, d) **d**

Pongo las monedas **973** a **999** en el plato izquierdo y las monedas **1000** a **1026** en el plato derecho. ¿Para dónde

DOI: http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2002.03n2.009


```
se inclina el fiel de la balanza? (i,
e, d)  i

Pongo las monedas 1000 a 1008 en el
plato izquierdo y las monedas 1009 a
1017 en el plato derecho. ¿Para dónde
se inclina el fiel de la balanza? (i,
e, d)  d

Pongo las monedas 1000 a 1002 en el
   plato izquierdo y las monedas 1003
   a 1005 en el plato derecho. ¿Para
   dónde se inclina el fiel de la
   balanza? (i, e, d)  d
Pongo la moneda 1000 en el plato
izquierdo y la moneda 1001 en el plato
derecho. ¿Para dónde se inclina el
fiel de la balanza? (i, e, d)  d

La moneda falsa es ligera y es la 1000
```

Nótese que el programa además de acorralar la respuesta al acertijo, tiene suficiente inteligencia para armar ciertas frases en español y distinguir singular y plural.

Conclusiones

Entre los acertijos sobre pesadas, uno de los más populares es el de identificar, con certeza, en tres pesadas, de entre 12 monedas, una moneda falsa, que puede ser más o menos pesada que las demás, utilizando una balanza de comparación. El acertijo aparece en (Kordemsky, 1992) y (Graham, 1959), los cuales proporcionan soluciones. Sin embargo, no explican cómo se llega a la solución. Uno de los problemas con los textos que pretenden enseñar a resolver problemas es que no dan suficientes explicaciones sobre las acciones básicas que hay que tomar para resolverlos. Frecuentemente los artículos y libros plantean los problemas y dan la solución sin mayores explicaciones. En general, en matemáticas, a los profesionales les gusta presentar soluciones elegantes, pulidas, que van derecho, sin desviaciones, del planteamiento a la demostración de que la respuesta es correcta. No exhiben los falsos arranques que se intentaron y no llevaron a la solución y no hablan de lo que se aprende con dichos falsos arranques para en futuros problemas tener menos falsos arranques.

La falta de discusión sobre las ideas básicas para llegar a una solución reduce la utilidad del paradigma que ilustra un problema, pues el estudiante sólo queda preparado para resolver problemas casi iguales al planteado. Esto es similar a tener una fórmula en la que solamente se le aplican los valores numéricos de las variables para calcular la respuesta. Si no se entiende el modelo y no se sabe algo de álgebra, solamente se pueden resolver problemas en los que las conocidas y la desconocidas son las mismas. Cuando se sabe álgebra es posible transformar la fórmula para que puedan cambiar las variables desconocidas y conocidas. Si además se comprende el modelo, es posible tener aun más latitud y hacerle modificaciones al modelo. Mientras más básico sea el entendimiento, mayor es la familia de problemas que cabrán en las adaptaciones.

Uno de los pocos autores que sí tratan el tema de las ideas básicas en las estrategias para resolver problemas es G. Polya (1945), (1965), (1954), (1981). También del mismo estilo es el libro de Hamming (1997). Al arte de resolver problemas en forma inventiva Polya le llama "heurística," término que también se utiliza en el campo de inteligencia artificial para la solución de problemas. Es la opinión del autor, después de 42 años de docencia en diversos niveles educativos, que el arte de resolver problemas requiere para su dominio el haber analizado y comprendido con profundidad una colección de paradigmas suficientemente rica para cubrir un terreno deseado. Algunos problemas requieren la utilización de métodos analíticos, otros ceden con más facilidad a métodos gráficos y otros a métodos numéricos tabulares o iterativos. En ocasiones, conviene utilizar la simulación; en otras, la optimización. En muchos casos hay necesidad de hacer experimentos en el campo, en otras es suficiente experimentar con modelos matemáticos en una computadora o con lápiz y papel. Muchos problemas se resuelven aplicando analogías, en algunas ocasiones hay que analizar todas las posibles combinaciones de elementos posibles. De ser

DOI: http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2002.03n2.009

posible hay que escoger las combinaciones que se vean más promisorias por diversas razones, ya sea porque una cierta ecuación es dimensionalmente correcta o porque resuelve adecuadamente el problema para casos extremos. Se valen las corazonadas. A los que tienen larga experiencia se les ocurren corazonadas que funcionan con más frecuencia.

El propósito de este artículo fue plantear uno de estos problemas paradigmáticos y resolverlo con explicaciones sobre cómo se llega a una solución. Hemos utilizado estrategias como comenzar con un problema simplificado, más sencillo que el que nos ocupa. Una vez resuelto el problema lo hemos generalizado y lo hemos programado para resolverlo con una computadora, lo cual nos hizo que nos sintiéramos que realmente aprendimos una técnica que tiene aplicabilidad a una región del campo de los problemas. Sería deseable que otros autores contribuyeran con soluciones a otros paradigmas para ir formando una colección valiosa, útil en la enseñanza del arte de resolver problemas.

Los acertijos sobre pesadas presentados aquí son paradigmas de familias de problemas que tienen amplia aplicabilidad. La discusión ha sido muy detallada con multitud de razonamientos intermedios, ideas básicas (como la de introducir un árbol diagnóstico, llevar cuenta de las posibilidades restantes y del número de puntas del árbol y subárboles) que llevan a la solución y también sobre ideas promisorias y falsos arranques que no llevan a la solución pero que con convenientes modificaciones son capaces de resolver los acertijos. (Por ejemplo, la búsqueda dicótoma no funciona para estos acertijos pero la tricótoma si). Muchos de los problemas que interesa resolver no tienen como solución un número, una palabra, un objeto o figura, sino una estrategia o proceso. Este es el caso de los acertijos tratados en este artículo. Cuando la solución es un proceso, dicha solución a menudo se puede presentar como un programa de computadora. Se señaló la ventaja pedagógica de hacerlo como una vía para apropiarse del conocimiento relacionado con el acertijo. Se muestra el detalle de una corrida de un programa para que el lector aprecie cómo el programa va encerrando la respuesta de la misma manera que un detective acorrala a un criminal.

No se ha agotado el tema de ninguna manera. Aunque se dieron estrategias para resolver un caso general para determinar una moneda falsa en N pesadas, el dato que proporciona el usuario es N y el programa determina la cantidad de monedas que se pueden manejar. También se puede plantear el caso en que el usuario proporciona el número de monedas y se desea saber en cuántas pesadas se puede determinar la falsa y cuál es la estrategia para lograrlo. En el artículo se introdujo una variante simple de esta situación al plantear el problema de las 8 monedas con la falsa más pesada. Cuando no se sabe de antemano si la moneda falsa es pesada o ligera no se puede en todos los casos simplemente tomar el tercer grupo con menos monedas por el hecho de que en ciertas circunstancias hay necesidad de poner varias monedas que se sabe que son buenas y quizás no se cuente con suficientes monedas de este tipo. Invitamos al lector a investigar las modificaciones a la estrategia dada para resolver el problema en el que se empieza con un número determinado de monedas en vez de un número de pesadas.

Referencias

Bellman R. y Gluss B. (1961). On Various Versions of the Defective Coin Problem. *Information and Control*, Vol. 4, 118 –131.

Bellman R., Cooke K.L. y Lockett J.A. (1970). *Algorithms, Graphs, and Computers*, Academic Press, New York.

Graham L.A. (1959). *Ingenious Mathematical Problems and Methods*. Dover Publications, Inc., New York.

Hammersley J.M. (1948). A Geometrical Illustration of a Principle of Experimental Directives. *Phil. Mag.*, Vol. 39, 118 – 131.

Hamming R.W. (1997). *The Art of Doing Science and Engineering*. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam.

Kordemsky B.A. (1992). *The Moscow Puzzles*. Dover Publications, Inc., New York.

Polya G. (1945). *How to Solve It*. Princeton University Press, Princeton, NJ. Versión en español: Polya G. (1965). *Como plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas, México. (reimpresión 1997).

DOI: http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2002.03n2.009

Polya G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning, Vol. I: Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton University Press, Princeton, NJ.

Polya G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning, Vol. II: Patterns of Plausible Inference*. Princeton University Press, Princeton, NJ.

Polya G. (1981). *Mathematical Discovery, Vols. I y II, (Edición combinada)*, John Wiley & Sons, Inc., New York.

Raisbeck G. (1963). *Information Theory*. M.I.T. Press, Cambridge, MA.

Semblanza del autor

Marco Antonio Murray-Lasso. Realizó la licenciatura en ingeniería mecánica-eléctrica en la Facultad de Ingeniería de la UNAM. El Instituto de Tecnología de Massachussetts (MIT) le otorgó los grados de maestro en ciencias en ingeniería eléctrica y doctor en ciencias cibernéticas. En México, ha laborado como investigador en el Instituto de Ingeniería y como profesor en la Facultad de Ingeniería (UNAM) durante 39 años; en el extranjero, ha sido asesor de la NASA en diseño de circuitos por computadora para aplicaciones espaciales, investigador en los Laboratorios Bell, así como profesor de la Universidad Case Western Reserve y Newark College of Engineering, en los Estados Unidos. Fue el presidente fundador de la Academia Nacional de Ingeniería de México; vicepresidente y presidente del Consejo de Academias de Ingeniería y Ciencias Tecnológicas (organización mundial con sede en Washington que agrupa las Academias Nacionales de Ingeniería) y secretario de la Academia Mexicana de Ciencias. Actualmente es jefe de la Unidad de Enseñanza Auxiliada por Computadora de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, investigador nacional en ingeniería, consejero educativo del MIT y consultor de la UNESCO.