



Respuesta de impacto de aislantes anti vibratorios con histéresis usando el modelo de Bouc-Wen

Shock response of vibration isolators with hysteresis using the Bouc-Wen model

Ledezma-Ramírez Diego Francisco
Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Centro de Investigación e Innovación en Ingeniería Aeronáutica
Correo: diego.ledezmard@uanl.edu.mx
<https://orcid.org/0000-0002-3197-0291>

Castillo-Morales Martín
Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Centro de Investigación e Innovación en Ingeniería Aeronáutica
Correo: martin.castillomr@uanl.edu.mx
<https://orcid.org/0000-0001-8954-6453>

Tapia-González Pablo Ernesto
Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Centro de Investigación e Innovación en Ingeniería Aeronáutica
Correo: pablo.tapiagz@uanl.edu.mx
<https://orcid.org/0000-0002-7471-5629>

Resumen

Los aislantes anti vibratorios usados para reducir y controlar la respuesta de impacto suelen presentar propiedades no lineales a causa de los altos niveles de deformación, de su configuración geométrica y materiales. En particular, los aislantes basados en materiales visco elásticos y los resortes construidos usando cables de acero son notables por sus propiedades no lineales. Además, al ser sometidos a cargas cíclicas forman lazos de histéresis en su curva fuerza deformación. Sin embargo, el estudio de la respuesta de impacto se ha limitado a modelos que estudian las propiedades no lineales de forma independiente, o bien, que omiten el efecto del amortiguamiento. Por esta razón, este trabajo presenta un análisis de la respuesta de impacto considerando el modelo de Bouc-Wen para sistemas con histéresis. Este modelo es ampliamente usado para representar lazos de histéresis causados por efectos no lineales en amortiguamiento y rigidez. Se discuten los trabajos más relevantes y se presentan antecedentes breves sobre la respuesta al impacto y el modelo de Bouc-Wen. Posteriormente, se presentan resultados teóricos analizando y discutiendo la respuesta de impacto absoluta y relativa, para finalmente investigar el efecto del incremento de la amplitud de entrada en la respuesta del sistema. Se concluye que bajo ciertas circunstancias las propiedades no lineales pueden resultar benéficas para el diseño de aislantes de alto rendimiento para ambientes extremos.

Descriptores: Impacto, aislantes de cable, amortiguamiento, fricción seca, rigidez no lineal.

Abstract

Vibration isolators are used to reduce and control shock response and usually present nonlinear stiffness and damping properties due to the high deformation levels and their geometric and material properties. In particular, viscoelastic isolators, and springs built from steel wires and ropes are notorious for their nonlinear properties. Moreover, when they are subjected to cyclic loading, they experience hysteresis. The Bouc-Wen model of hysteresis is widely used for representing the dynamic behaviour of nonlinear systems and structures under cyclic loading, as it can reproduce a variety of softening and hardening hysteresis loops by proper selection of its parameters. However, the study of shock response on these isolators is limited to studies of the nonlinear properties separately, or without considering damping. As a result, this work presents an analysis of the theoretical shock response using the Bouc-Wen model, focusing on hardening and softening stiffness. The most recent works are briefly discussed and a short background on shock isolation and the Bouc-Wen model is presented. Then, the absolute and relative responses under shock inputs are studied, as well as the effect of the input amplitude. It is concluded that under certain circumstances, the nonlinear properties can be beneficial for the further design of high performance shock isolators for extreme environments.

Keywords: Shock, cable isolators, damping, dry friction, nonlinear stiffness.

INTRODUCCIÓN

Los impactos y vibraciones mecánicas son causa de efectos negativos como desgaste, fatiga y ruido, en máquinas, estructuras, componentes electrónicos, personas etcétera. Las vibraciones producidas por impacto son de particular importancia a causa de los altos niveles de fuerza y aceleración aplicados en intervalos de tiempo muy cortos, y resultan difíciles de aislar y controlar. Algunos ejemplos comunes de impactos se pueden encontrar en maquinaria industrial como prensas y troqueladoras, aplicaciones aeroespaciales, navales y militares que involucran explosiones, aterrizajes, turbulencias, golpes del oleaje, topes y baches en transporte terrestre, entre otros. Como resultado, el uso de sistemas de aislamiento y control es imperativo para minimizar efectos negativos. El fundamento del aislamiento consiste en almacenar la energía del impacto en un componente elástico, y su posterior disipación por un medio amortiguante. En la práctica, esto se consigue por medio de aislantes como resortes helicoidales, resortes de aire, aislantes de hule natural o sintético, etcétera. Entre los diferentes aislantes que se encuentran en el mercado, los resortes de cable (*wire rope* en inglés) son notables por su alta capacidad de almacenar energía por deformación y disiparla por medio de fricción seca. Se componen de una cuerda formada de hilos de acero enlazados en forma de hélice, que, a su vez, forman un cable entrelazando cierto número de cuerdas (Balaji *et al.*, 2015a). Los resortes de cable se diseñan en diferentes configuraciones y capacidades, pudiendo trabajar en tres ejes, es decir, compresión/tensión en dirección axial, y corte/torsión en las direcciones transversales. Cuando se deforman se produce un movimiento relativo entre las hebras de acero causando fricción seca, y cuando son sujetos a carga cíclica se presentan lazos de histéresis. Además, tienen propiedades no lineales en sus curvas de fuerza-deformación. Es importante mencionar que la mayor parte de los diseños se basa en enfoques empíricos y en los modelos clásicos de aislamiento que no reflejan adecuadamente sus propiedades no lineales. Además, a la fecha, no existe un estudio que describa correctamente y de manera completa el comportamiento dinámico analítico y experimental de estos aislantes bajo cargas de impactos. La importancia de contar con herramientas que permitan predecir el comportamiento y diseñar de manera sistemática aislantes de cable es patente dado el uso extensivo de este tipo de aislantes en la práctica, y más aún dado el renovado interés que existe en estos aislantes. Por ejemplo, recientemente se han desarrollado aislantes de cable con diseños empíricos para aislar videocá-

maras de vibraciones externas (Stratus Productions, 2017). Debido a estas razones, este trabajo pretende contribuir en el modelado y predicción teórica de la respuesta de impacto en este tipo de aislantes. A partir de que este tipo de aislantes que presentan propiedades de histéresis no lineal en sus propiedades de fuerza y deformación, en este trabajo se presenta un análisis teórico de la respuesta de impacto basado en el modelo de Bouc-Wen para sistemas con histéresis. Este modelo ha sido ampliamente usado para representar las características de los resortes de cable, sin embargo, no se ha estudiado su comportamiento y respuesta a impactos. El presente artículo se estructura de la siguiente forma. Se presenta una revisión de los antecedentes más relevantes sobre el estudio y modelaje de resortes de cable y respuesta de impacto, para posteriormente discutir de forma breve la teoría de aislamiento de impacto y el modelo de histéresis de Bouc-Wen. Se presentan resultados de simulaciones de la respuesta de impacto para diferentes parámetros típicos del modelo de histéresis que controlan el tipo de no linealidad en la rigidez, discutiendo su efecto en la respuesta. Se estudia también el efecto que tiene el incremento del nivel de amplitud de entrada en la respuesta del sistema, que es relevante dadas las propiedades no lineales. Se concluye con una discusión general sobre los resultados encontrados y comparaciones con resultados experimentales previos, presentando posibilidades de trabajo a futuro. El presente estudio pretende aportar información útil y novedosa para contribuir al desarrollo y diseño de sistemas de aislamiento más eficaces. La principal importancia de este estudio radica en la falta de información teórica en la respuesta de impacto de sistemas con fricción seca y rigidez no lineal y por lo tanto, los resultados presentados son novedosos y con aplicaciones prácticas a futuro. Además, los resultados presentados permitirán conocer los efectos de los parámetros que definen la linealidad del sistema, para aprovechar las propiedades no lineales en el diseño de aislantes más eficaces.

ANTECEDENTES

El uso de resortes de cable se remonta al estudio de Esheleman y Rao (1969) quienes analizaron la respuesta de diferentes tipos de elementos anti vibratorios para cargas de impacto, como resortes helicoidales, amortiguadores hidráulicos y neumáticos, resortes de anillo, y resortes de cable, concluyendo que los resortes con fricción seca son preferibles debido a sus altas capacidades de almacenar y disipar energía. Cutchins *et al.* (1987) publicaron estudios sobre rigidez y amortiguamiento no lineales, presentando modelos analíticos para descri-

bir los lazos de histéresis comunes en estos sistemas; este estudio se enfocó a resortes de cable, destacando que las hebras de acero tienden a separarse cuando el aislante se comprime, mientras que cuando se tensiona aumenta la superficie de contacto, y la resistencia al movimiento relativo se incrementa, de forma que la relación fuerza-deformación es diferente a compresión que a tensión; se presentó también un modelo semi empírico para describir la respuesta del aislante bajo cargas axiales. Demetriades *et al.* (1993) consideraron la respuesta de aislantes de cable para cargas sísmicas, desarrollando un modelo analítico que se calibró con resultados experimentales. Popp (2000) presentó una investigación teórica citando estudios relevantes sobre la naturaleza discontinua de los fenómenos involucrados, es decir, impacto y fricción seca, resaltando ejemplos de la vida diaria y la importancia de su estudio. El modelo más generalizado para la representación de sistemas mecánicos con histéresis es el modelo de Bouc-Wen (Charalampakis y Koumousis, 2008) el cual es un enfoque semi analítico que permite la representación de una amplia variedad de lazos de histéresis. Leenen (2002) estudió el comportamiento de resortes de cable bajo cargas cíclicas de tipo axial, encontrando que los lazos de histéresis obtenidos no son simétricos. Por medio de un proceso de optimización se identificaron los parámetros correspondientes al modelo de Bouc-Wen con base en los resultados experimentales para evaluar la respuesta dinámica en cargas cíclicas. Se encontró que el modelo de Bouc-Wen permite una representación adecuada de las características de los resortes de cable. Schwanen (2004) usó un modelo modificado de Bouc-Wen, para una mejor representación del efecto no simétrico de los resortes de cable, que presentan características de suavizado en la rigidez en compresión y endurecimiento en tensión. Gerges y Vickery (2003) presentaron un modelo de la rigidez y el amortiguamiento de resortes de cable basado en mediciones experimentales, demostrando que la relación fuerza desplazamiento depende de la frecuencia. El modelo de fuerza se basó en una viga curva, mientras que el amortiguamiento se modeló con base en un componente de fricción seca y otro dependiente de la amplitud de desplazamiento. Se presentaron ecuaciones para estimar estas propiedades de acuerdo con la construcción de los cables (Balaji *et al.*, 2015b; 2016). presentaron un estudio analítico de la rigidez vertical de resortes de cable analizando los efectos de las dimensiones y características del cable, encontrando que el diámetro del cable es la propiedad más importante que define la rigidez vertical. En el caso de la respuesta de impacto, los estudios publicados se limitan a los análisis experimentales de Guzmán (2015) quien estudió experi-

mentalmente el amortiguamiento y respuesta de impacto de los resortes de cable, se encontró que existe un nivel máximo de energía que es posible disipar para cierto nivel de carga del aislante, después del cual si se incrementan las cargas al aislante la cantidad de energía disipada disminuye. Tapia y Ledezma (2017) consideraron también la respuesta experimental de impacto, sometiendo diferentes muestras de resortes de cable a impactos de diferente magnitud y duración, encontrando un mejor rendimiento comparado con sistemas lineales equivalentes. Se puede apreciar en la revisión de literatura que, salvo los análisis experimentales de la respuesta de impacto en resortes de cable, no existe a la fecha un análisis teórico usando el enfoque de Bouc-Wen para formular la respuesta de impacto de este tipo de aislantes. El presente trabajo cubre esta necesidad al proveer de información nueva y comparar con los resultados más importantes de estudios previos.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

RESPUESTA DE IMPACTO

Los impactos se definen como una excitación de corta duración, con un alto contenido de energía (Harris y Piersol, 2002). La respuesta al impacto se cuantifica usando parámetros o índices de rendimiento, como el desplazamiento absoluto y relativo de la masa aislada que son indicadores del espacio disponible, y la aceleración máxima, que es un indicador de las fuerzas transmitidas. Para estudiar la respuesta de impacto comúnmente se modela el sistema con un grado de libertad considerando una masa a aislar m , y el aislante compuesto por un conjunto paralelo de rigidez k , y amortiguamiento c (MKC). El modelo matemático del sistema con amortiguamiento viscoso sujeto a una excitación de impacto en la forma de una aceleración por la base, está dado por la ecuación (1) (Harris y Piersol, 2002).

$$\ddot{v} + 2\zeta\omega_n\dot{v} + \omega_n^2v = \xi_p \sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) \quad (1)$$

Donde

- $\omega_n = \sqrt{k/m}$ = frecuencia natural del sistema
- ζ = razón de amortiguamiento viscoso dada por $\zeta = c/2m\omega_n$
- c = constante real de amortiguamiento
- t = tiempo

Considerando la nomenclatura definida por Harris y Piersol (2002), la excitación ξ_p es genérica y puede re-

presentar diferentes situaciones como desplazamiento por la base, aceleración, fuerza, etcétera. De esta forma, la respuesta v es también genérica y depende del tipo de entrada. En este caso, el sistema está sujeto a una excitación impulsiva de aceleración aplicada a la base de tipo medio seno con amplitud máxima ξ_p y duración τ y la respuesta v representa la aceleración absoluta de la masa. La función de medio seno es una función impulso típicamente usada para la predicción de respuesta de impacto. La Figura 1b presenta un ejemplo gráfico de la función de medio seno para diferentes valores de la duración relativa. Para establecer la duración relativa del impulso se define una relación de periodos, es decir, se compara la duración del impacto con el periodo natural fundamental del sistema τ/T .

La respuesta de impacto del sistema MKC se divide en tres categorías según esta relación de periodos. Cuando la duración del impacto es muy corta, menor que la mitad de la duración del periodo natural, la respuesta es impulsiva, y su magnitud es menor que la magnitud de la entrada, además, la respuesta máxima ocurre cuando el impacto ha terminado. Cuando la duración del impacto es aproximada al periodo natural, la

respuesta se amplifica, siendo este un caso análogo a la resonancia mecánica. Para pulsos de duración mayor que el doble del periodo natural, la excitación deja de ser impulsiva y se considera cuasi estática o de lenta aplicación, y la respuesta sigue de manera cercana la amplitud y forma del pulso de entrada. Para facilidad de análisis, estas zonas de respuesta al impacto se pueden englobar en una gráfica llamada "Espectro de Respuesta de Impacto" o (SRS por sus siglas en inglés Shock Response Spectra), que se puede sintetizar de manera analítica o experimental. La Figura 1a presenta un ejemplo de SRS para un sistema de un grado de libertad con bajo amortiguamiento, sujeto a un impacto de tipo pulso medio seno, en forma de aceleración aplicada a la base. El eje vertical representa la respuesta del sistema v normalizada respecto a la amplitud máxima del impulso de entrada ξ_p , y el eje horizontal representa la relación relativa de la duración del pulso respecto al periodo natural τ/T . Este tipo de gráficas son ampliamente empleadas para caracterizar la severidad de los impactos, seleccionar y diseñar aislantes y desarrollar pruebas de impacto. Se presentan en este ejemplo los tres parámetros de respuesta comunes, respuesta máxi-

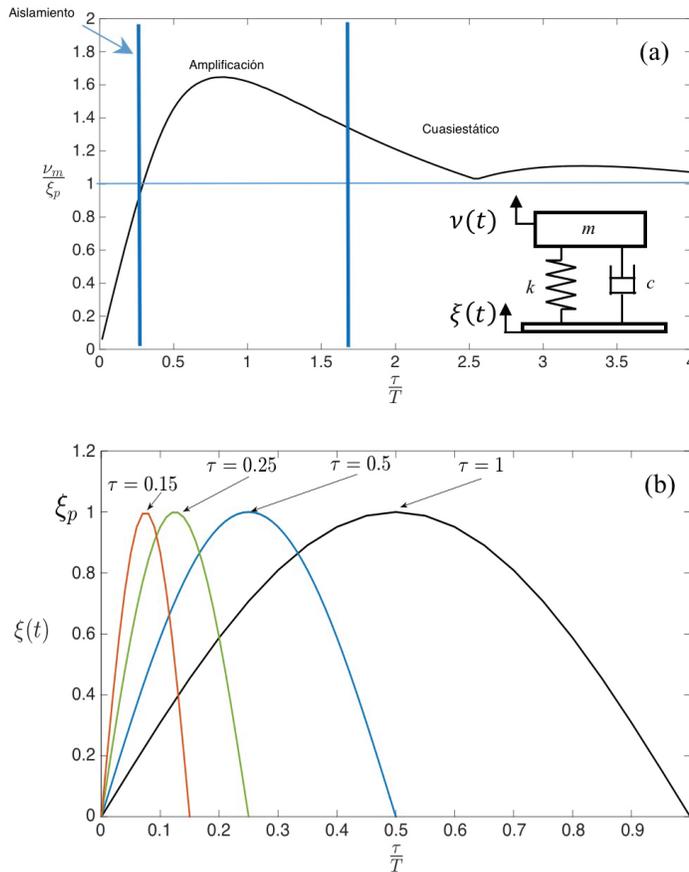


Figura 1. a) Espectro de respuesta al impacto para un sistema de un grado de libertad bajo una aceleración de medio seno por la base, b) entrada de medio seno para diferentes duraciones (Tapia y Ledezma, 2017). (— Máximax, --- Relativa, - - - Residual)

ma absoluta en cualquier instante, conocida como máximax, respuesta máxima residual, que ocurre después de la aplicación del impacto, y respuesta máxima relativa, que representa la deformación del elemento elástico dada por la diferencia de movimiento entre la base y la masa.

MODELO DE HISTÉRESIS DE BOUC-WEN

Uno de los modelos más generalizados para el estudio de la respuesta dinámica de sistemas no lineales con amortiguamiento de tipo estructural, fricción seca o interno caracterizados por exhibir histéresis, es el modelo de Bouc-Wen, definido por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales (2), para un sistema de un grado de libertad (Li y Meng, 2007).

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + (1 - \gamma)\omega_n^2z = u(t) \tag{2}$$

$$\dot{z} = A\dot{x} - \alpha|\dot{x}|z|z|^{n-1} - \beta x|z|^n$$

Donde

- \ddot{x}, \dot{x}, x = aceleración, velocidad y desplazamiento, respectivamente
- z = fuerza histéretica
- $u(t)$ = fuerza externa
- γ = razón post cedencia a pre cedencia
- A, α, β = regulan el tamaño del lazo de histéresis
- n = suavidad en las transiciones del lazo

De acuerdo con la selección de los parámetros, el modelo Bouc-Wen puede producir una variedad de lazos de histéresis para representar diferentes tipos de sistemas, por ejemplo endurecimiento o ablandamiento de la rigidez, es decir, “hardening” o “softening”, respectivamente. Este modelo es semi empírico, y requiere de la determinación

de los parámetros con base en mediciones experimentales de desplazamiento o fuerza controlados, usando técnicas de optimización e identificación de sistemas, como filtros Kalman, evolución diferencial, algoritmos genéticos, etcétera (Charalampakis y Koumousis, 2008). En general, los parámetros regulan la forma y el tamaño del lazo, encontrándose diferentes combinaciones de acuerdo con los valores de estos parámetros (Schwanen, 2004). La Figura 2 muestra ejemplos de lazos de histéresis obtenidos con casos característicos de los parámetros del modelo en relación con las combinaciones posibles más características. Los parámetros $A = 1, n = 1, \gamma = 0.5$, se toman como fijos, por considerarse como restricciones en el modelo para facilitar su identificación y la integridad del modelo matemático. Los diferentes lazos se calcularon con los parámetros indicados en la Tabla 1. Es importante mencionar, que dada la naturaleza semi empírica del modelo, los parámetros de este no tienen significado físico, y es posible que diferentes combinaciones de parámetros lleven al mismo lazo. Por lo tanto, la selección de los parámetros en este estudio no obedece ninguna regla concreta, solo se presentan para exponer una muestra representativa de diferentes casos según el tipo de lazo. En la Figura 2a, 2b, 2c, 2d y 2f se aprecian sistemas con ablandamiento, mientras que los casos restantes muestran sistemas con endurecimiento. Se aprecia claramente como la selección de parámetros del modelo afecta no solo la forma del lazo y el tipo de rigidez que caracteriza al sistema, sino también el área dentro del lazo que define la energía disipada. La Tabla 1 presenta además un resumen del comportamiento de la rigidez y el nivel de amortiguamiento expresado en términos del factor de pérdida (loss factor) calculado con base en el área dentro del lazo según el método presentado por Guzmán *et al.* (2015). De manera general se puede observar como a mayor área del lazo, la energía disipada es mayor reflejándose en un aumento del factor de pérdida.

Tabla 1. Descripción de los casos considerados según los parámetros de Bouc-Wen, tipo de rigidez y amortiguamiento

Caso	Parámetros	Tipo de rigidez	Factor de pérdida η (amortiguamiento)
a	$\alpha = 0.75$ y $\beta = 0.25$	Ablandamiento	0.9710
b	$\alpha = 1$ y $\beta = 0$	Ablandamiento	1.0271
c	$\alpha = 0.25$ y $\beta = 0.75$	Ablandamiento	0.7639
d	$\alpha = 0.05$ y $\beta = 0.95$	Ablandamiento	0.1234
e	$\alpha = 0.8$ y $\beta = -0.2$	Ablandamiento	0.8804
f	$\alpha = 0.5$ y $\beta = -0.5$	Endurecimiento	0.5229
g	$\alpha = 0.3$ y $\beta = -0.7$	Endurecimiento	0.1457
h	$\alpha = 0.15$ y $\beta = -0.85$	Endurecimiento	0.0560
i	$\alpha = 0.05$ y $\beta = -0.95$	Endurecimiento	0.0296

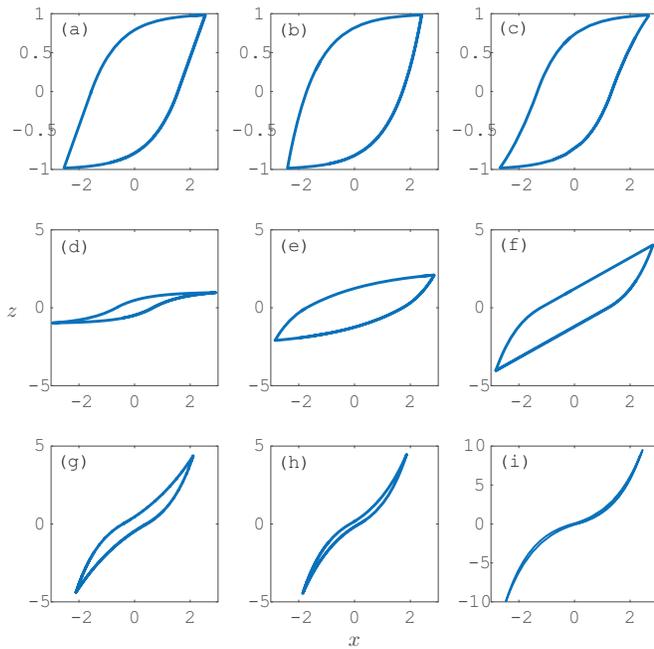


Figura 2. Lazos de histéresis resultantes de diversas combinaciones en los parámetros del modelo de Bouc-Wen. Los casos presentados corresponden a los indicados en la Tabla 1

COMPORTAMIENTO DE LOS RESORTES DE CABLE

Como se ha mencionado, los resortes de cable permiten grandes deformaciones en espacios compactos y son altamente amortiguados, lo que los hace idóneos para aislar vibraciones e impactos, además de presentar histéresis por sus propiedades no lineales. Se describen brevemente algunas de sus propiedades en esta sección. La Figura 3a muestra diferentes modelos de resortes de cable disponibles comercialmente, en particular el modelo etiquetado como 1 se presenta como ejemplo de las propiedades típicas de estos resortes bajo carga axial. Por ejemplo, en la Figura 3b se aprecia el comportamiento de la relación fuerza deformación que es claramente no lineal, presentando ablandamiento hasta aproximadamente la mitad de la carrera y posteriormente endurecimiento. Este fenómeno se confirma por la Figura 3c, en donde se detalla cómo se comporta la rigidez en la carrera de deformación. Por último, en la Figura 3d se pueden observar los lazos de histéresis resultantes de aplicar carga cíclica sobre el aislante, cada lazo corresponde a un nivel de amplitud de entrada. Por ejemplo, el lazo más pequeño corresponde al menor desplazamiento de entrada y tiene características de ablandamiento, es decir, requiere menos carga para mantener la misma razón de deformación. En contraste, el lazo más grande que corresponde al mayor nivel de desplazamiento de entrada, presenta endurecimien-

to en la rigidez, dado que se requiere mayor carga para mantener la razón de deformación.

RESPUESTA DE IMPACTO DEL MODELO BOUC-WEN

Para estudiar la respuesta de impacto del modelo de Bouc-Wen, se considera nuevamente la excitación externa como una función de medio impulso seno, y posteriormente una vez terminado el impacto el sistema se comporta de manera libre. El modelo matemático se representa en la ecuación (3) considerando la notación para respuesta de impacto descrita en la sección Respuesta de impacto.

$$\ddot{v} + 2\zeta\omega_n\dot{v} + \omega_n^2z(1-\gamma) = \xi_p \sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) \tag{3}$$

$$\dot{z} = A\dot{v} - \alpha|\dot{v}|z|z|^{n-1} - \beta\dot{v}|z|^m$$

Donde v representa la respuesta del sistema, y ξ_p representa la amplitud de entrada. Se estudia la respuesta en tiempo para diferentes valores de los parámetros con α , β , y el espectro de respuesta de impacto para respuesta máxima y relativa. Primeramente, la Figura 4 muestra diferentes historias en tiempo para los parámetros del modelo Bouc-Wen considerados, y relaciones de periodos del impacto: a) $\tau/T = 0.25$, b) $\tau/T = 0.5$, c) $\tau/T = 1$, d) $\tau/T = 2$. Para las historias en tiempo solo se muestran

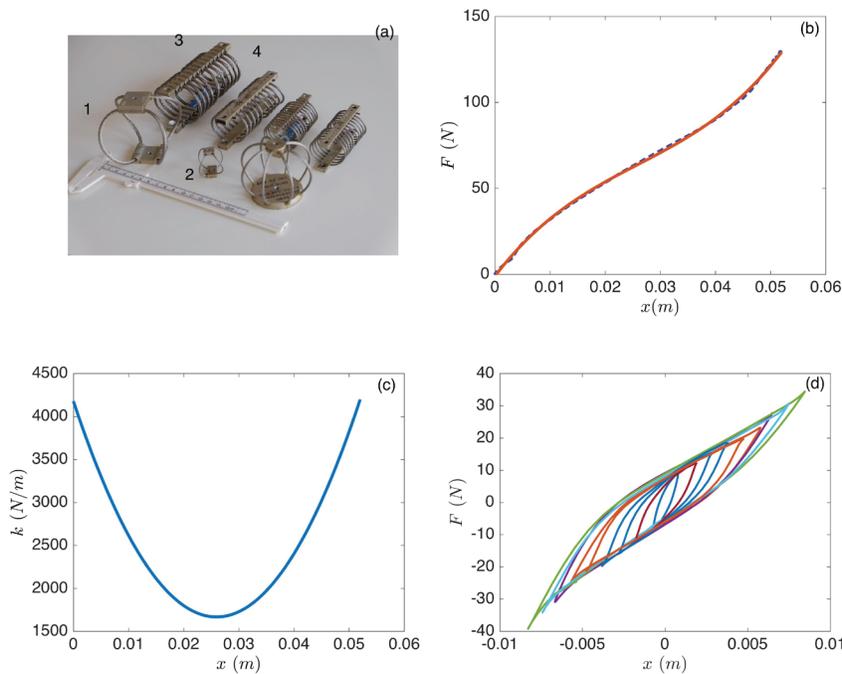


Figura 3. Características de los resortes de cable, a) diferentes muestras comerciales, la muestra etiquetada con 1 se usó en las mediciones, b) curva de fuerza deformación, c) curva de rigidez deformación, d) lazos de histéresis bajo carga cíclica con amplitud variable

los casos para cuando $\alpha = 0.5$, $\beta = -0.95$ y $\alpha = 1$, $\beta = 0$ con endurecimiento y ablandamiento, respectivamente, por ser los casos que presentaron la menor, y mayor respuesta respectivamente, para los ejemplos considerados y son representativos del comportamiento de los dos tipos de rigidez.

La Figura 4 demuestra que los sistemas con endurecimiento presentan una menor respuesta de impacto comparados con los sistemas con ablandamiento, teniendo como base la respuesta del sistema lineal. Además, este efecto es más prominente para pulsos de duración relativa a partir de $\tau/T = 0.5$ hasta valores similares en duración al periodo natural del sistema, en comparación con pulsos de mayores duraciones. Es importante destacar que, para pulsos de muy corta duración, es decir, menores a $\tau/T = 0.25$ la respuesta en los dos casos no lineales es prácticamente la misma, siendo equivalentes a la respuesta del sistema lineal. Esto se debe a que, para pulsos muy cortos, la excitación tiende a comportarse como una función Delta de Dirac, la forma del pulso deja de tener relevancia sobre la respuesta, y la respuesta se vuelve impulsiva. Además de que la respuesta máxima ocurre como respuesta libre, una vez que el pulso ha terminado. Para poder establecer una comparación completa y una mejor visualización de los fenómenos explicados por las respuestas en tiempo, las Figuras 5a y 5b presentan los espectros de respuesta de impacto correspondientes a las respuestas máxima absoluta y relativa, para los parámetros del modelo Bouc-Wen $\alpha = 0.5$ y $\beta = 0.5$, $\alpha = 0.7$ y $\beta =$

-0.3 , $\alpha = 0.85$ y $\beta = -0.15$, correspondientes a ablandamiento, mientras que los parámetros $\alpha = 0.3$ y $\beta = -0.7$, $\alpha = -0.15$ y $\beta = -0.85$, corresponden a endurecimiento. Se incluye también como referencia la respuesta del sistema lineal sin amortiguamiento. En estas gráficas, cada punto de la curva representa un valor único de respuesta máxima de acuerdo con el parámetro seleccionado. Además, a manera de comparación se han incluido los resultados experimentales obtenidos en diferentes resortes de cable disponibles comercialmente, presentados en un estudio previo por Tapia (2017), mismos que se describen en la Figura 3a. En el citado estudio se pueden consultar detalles del procedimiento experimental. Se describe a continuación el comportamiento de la respuesta teórica.

En la Figura 5 se aprecia una reducción de la respuesta en ambos parámetros cuando la rigidez descrita por el modelo Bouc-Wen es del tipo endurecimiento (hardening) dado que alrededor de la posición de equilibrio el valor de rigidez dinámica es bajo. En contraste, cuando la rigidez es de tipo ablandamiento (softening) la respuesta se incrementa debido a la menor fuerza de restauración para mayores desplazamientos. Se aprecia claramente que para impactos en la zona impulsiva o de aislamiento, para $\tau/T < 0.25$, la respuesta en todos los casos considerados es muy similar a la del sistema lineal. El efecto más marcado sucede a partir de $\tau/T = 0.5$ y sobre todo alrededor de la zona de amplificación cuando el periodo natural es similar a la duración del impacto, hasta aproximadamente $\tau/T = 2$, cuando la excitación se vuelve

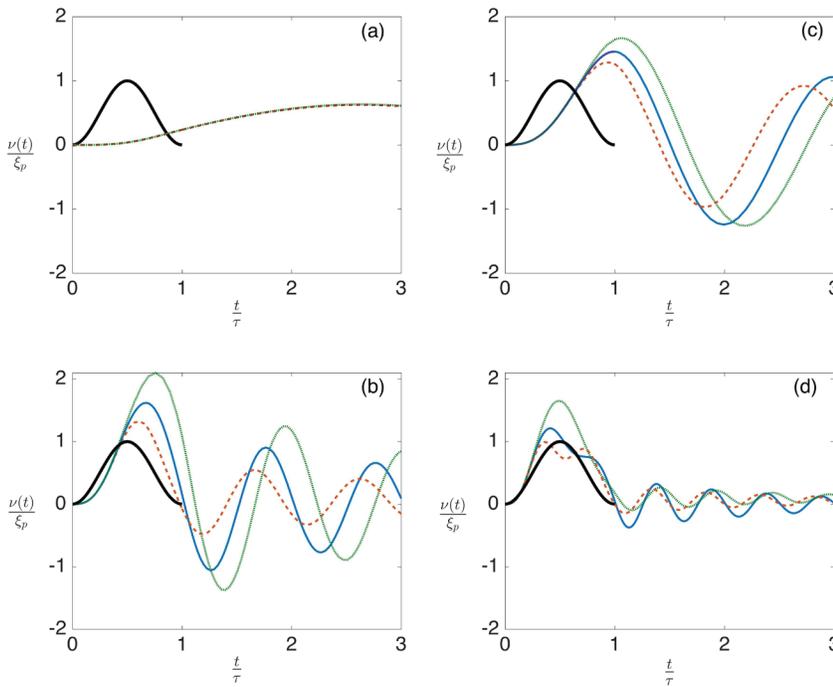


Figura 4. Respuesta de impacto del modelo Bouc-Wen. La respuesta es normalizada respecto a la amplitud máxima de entrada y el eje horizontal se normaliza de acuerdo con la duración del pulso: a) $\tau/T = 0.25$, b) $\tau/T = 0.5$, c) $\tau/T = 1$, d) $\tau/T = 2$. (- - Sistema con endurecimiento $\alpha = 0.05$, $\beta = -0.95$... Sistema con ablandamiento $\alpha = 1$, $\beta = 0$, ---- Sistema lineal)

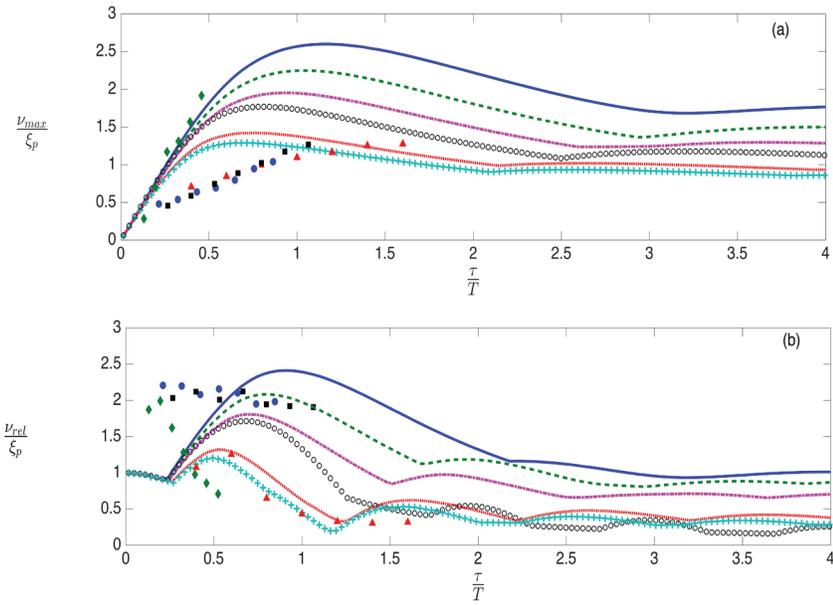


Figura 5. Espectro de respuesta de impacto del modelo Bouc-Wen. La respuesta se normaliza respecto a la máxima amplitud de entrada mientras que el eje horizontal representa la razón de periodos: a) respuesta maximax absoluta, b) respuesta relativa. (— $\alpha = 0.5$ y $\beta = 0.5$, - - - $\alpha = 0.7$ y $\beta = -0.3$, - - - $\alpha = 0.85$ y $\beta = -0.15$, · · · $\alpha = 0.3$ y $\beta = -0.7$; + + + $\alpha = 0.05$ y $\beta = -0.95$, ○○ sistema lineal, ■, ●, ◆, ▲ aislante 1, 2, 3, 4)

cuasiestática. En esta zona, se aprecia el mayor decremento de la respuesta para los sistemas con endurecimiento, lo que se traduce en un mejor rendimiento del sistema aislante. En contraste, el aumento en la respuesta para los sistemas con ablandamiento es más significativo. En el caso de la respuesta relativa, se aprecia la tendencia del sistema a seguir la amplitud de entrada para impactos de corta duración, es decir, que la relación de

respuesta relativa comparada con el impulso de entrada es aproximadamente igual a la unidad. Esto sucede dado que, en impactos de muy corta duración, la respuesta máxima ocurre después de aplicar el impacto, y es muy baja durante este periodo de vibración forzada. Como resultado, la energía del impacto se absorbe por la deformación del elemento elástico descrita por el desplazamiento relativo. Para los sistemas con endurecimiento,

cuando los impactos se encuentran en la zona de ampliación, la respuesta relativa se reduce de acuerdo con la tendencia de la respuesta absoluta. En impactos de larga duración, se aprecia una respuesta ligeramente mayor a la del sistema lineal, manteniendo una tendencia similar. En contraste, los parámetros de ablandamiento provocan un aumento en el desplazamiento relativo, comparados con la respuesta del sistema lineal en todo el rango de duraciones relativas del espectro de impacto.

EFFECTO DE LA AMPLITUD DE ENTRADA

Cuando un sistema es lineal, la proporción entre entrada y respuesta se mantiene constante, es decir, si la entrada aumenta al doble, la respuesta incrementa de la misma forma, y por ende, la relación salida entrada se mantiene constante. Sin embargo, este principio no es válido en el caso de los sistemas no lineales. Como en este estudio se trata un sistema altamente no lineal, es importante observar el efecto de la variación del nivel de amplitud de entrada en la respuesta del sistema. Para investigar este fenómeno relacionado con la respuesta de impacto, se seleccionaron dos casos, uno de ablandamiento con los parámetros $\alpha = 1, \beta = 0$ y de endurecimiento con $\alpha = 0.05, \beta = -0.95$. Estos parámetros son los mismos considerados en las respuestas en tiempo presentadas en la Figura 4 por ser representativos de los efectos observados de acuerdo con el tipo de rigidez, como se estableció en la sección de respuesta de impacto del modelo Bouc-Wen. Se consideraron ampli-

tudes máximas del impulso medio seno de aceleración, desde 10 m/s^2 y 100 m/s^2 en intervalos de 10 m/s^2 . A partir de estos valores, se calcularon las respuestas teóricas para obtener los espectros de respuesta absoluta máximas y residual. La Figura 6 presenta gráficos de cascada de los espectros calculados, en donde el eje x representa razón de periodos, el eje y respuesta normalizada respecto a la amplitud de entrada, y el eje z representa el nivel pico de la amplitud de entrada. Se presentan cuatro casos para respuesta absoluta en ablandamiento: 6(a) absoluta para endurecimiento (b), relativa en ablandamiento (c) relativa para endurecimiento (d). Se aprecia como en el caso del sistema con parámetros de ablandamiento, hay un incremento no lineal en la respuesta a medida que la amplitud de entrada aumenta, que se observa en la respuesta absoluta y en la relativa. Sin embargo, en el caso del sistema con endurecimiento, la respuesta absoluta normalizada es menor a medida que la entrada aumenta. Es decir, que la proporción en que la respuesta aumenta es mucho menor en comparación con el incremento de la entrada. Para el caso de la respuesta relativa, hay un incremento a medida que aumenta la entrada. Esto se debe a que, para poder reducir la respuesta absoluta, se requiere deformación en el elemento elástico, a mayor aislamiento, mayor deformación. Como se ha comentado anteriormente, el desplazamiento relativo es un indicador de la deformación del elemento elástico. Es importante señalar que independientemente del tipo de rigidez, y del nivel de amplitud de entrada, para impac-

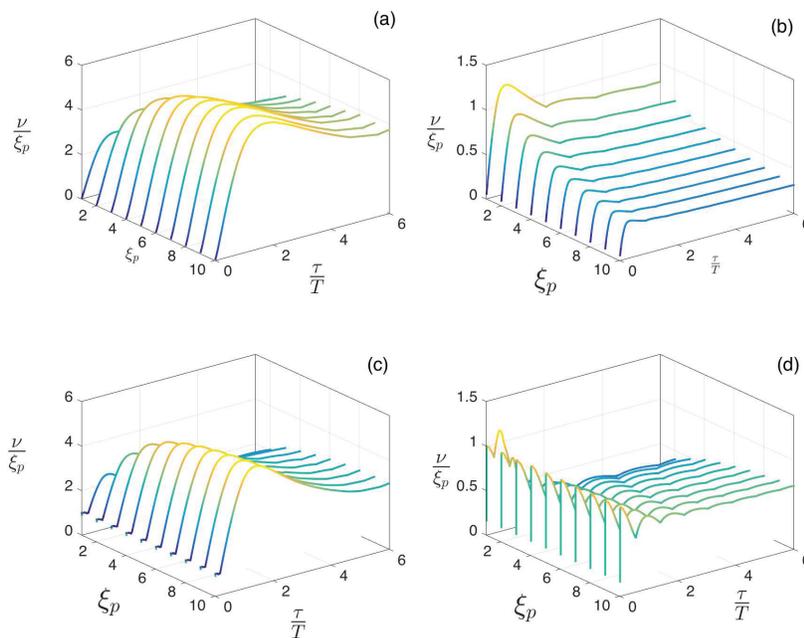


Figura 6. Espectro de respuesta para incrementos en la amplitud de entrada. El eje y representa respuesta normalizada respecto a la máxima amplitud de entrada, el eje x representa razón de periodos, y el eje z representa amplitud de entrada: a) respuesta maximax en ablandamiento, b) respuesta maximax en endurecimiento, c) respuesta relativa en ablandamiento, d) respuesta relativa en endurecimiento

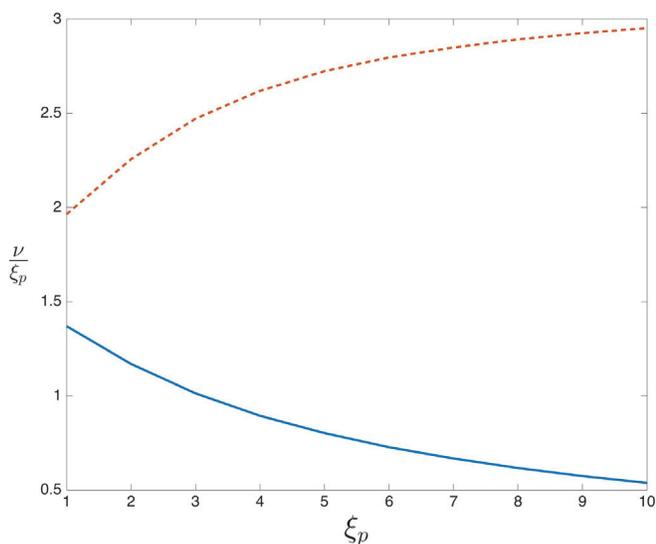


Figura 7. Efecto del incremento en la amplitud de entrada sobre la respuesta del modelo Bouc-Wen. El eje vertical representa respuesta normalizada de acuerdo con la máxima amplitud de entrada mientras que el eje horizontal representa la amplitud de entrada (- Endurecimiento, - - Ablandamiento)

tos de muy corta duración, la respuesta relativa siempre tiende a la unidad.

La tendencia descrita se puede apreciar en la Figura 7 que representa la variación de la respuesta en función de la entrada. En esta figura se presenta únicamente la respuesta absoluta para los dos casos estudiados de endurecimiento y ablandamiento.

En este caso se seleccionó la razón de periodos unitaria que representa la zona de mayor respuesta en cada caso considerado. Es claro que para el sistema con ablandamiento descrito por la línea quebrada la respuesta aumenta a medida que la entrada aumenta. Caso contrario para el sistema con endurecimiento dado por la línea continua, donde la respuesta es menor y muestra un comportamiento asintótico a medida que la entrada aumenta.

DISCUSIÓN

Una vez expuestos los resultados, es importante destacar que se mantienen las tendencias observadas en estudios teóricos y experimentales realizados previamente por Ledezma *et al.* (2015) y Tang y Brennan (2014), que han determinado que un sistema con rigidez no lineal, con endurecimiento y baja rigidez dinámica, presenta mejores propiedades de aislamiento de impacto, cuando la respuesta máxima absoluta es el parámetro de interés, aunque con detrimento de la respuesta relativa. Esto debido a que la deformación es necesaria para almacenar la energía impulsiva proveniente del impacto, y el desplazamiento relativo, donde estos son un indicador de esta deformación. Sin embargo, los modelos presentados por las referencias señala-

das consideran una función de rigidez cúbica sin amortiguamiento. La importancia del enfoque aquí presentado al considerar el modelo de histéresis de Bouc-Wen es que representa el comportamiento no lineal en rigidez y amortiguamiento simultáneamente. Además, los estudios previos no han considerado entradas de impacto destacando la novedad de los resultados de este estudio. Los diferentes casos estudiados en este trabajo ejemplifican de manera clara el uso potencial de dicho modelo, para predecir la respuesta de impacto, y dado que, a la fecha, no se ha estudiado de manera teórica este comportamiento, en el modelo Bouc-Wen, este enfoque presenta gran potencial para el estudio del comportamiento dinámico de los resortes de cable. Por otra parte, es de destacar la comparación con la respuesta experimental de impacto presentada en trabajos previos. Las respuestas al impacto de muestras comerciales de resortes de cable muestran una tendencia muy cercana a la respuesta teórica, especialmente para impactos de muy corta duración. Sin embargo, cuando se observa la respuesta durante amplificación, los resultados experimentales muestran respuestas menores a las predicciones. Esto se puede explicar considerando que los modelos teóricos con endurecimiento considerados, tienen muy bajo amortiguamiento, en contraste con los resortes reales, que tienen propiedades de endurecimiento, pero alto amortiguamiento. En cuanto a las respuestas experimentales de desplazamiento relativo existe también una diferencia notable con las respuestas teóricas, sin embargo, la tendencia observada es la esperada. Es decir, que para impactos muy cortos el desplazamiento relativo tiende a ser alto, debido a que la energía del impacto se alma-

cena en la deformación del resorte, mientras que la duración del impacto incrementa, el desplazamiento relativo tiende a disminuir. Debido a esto, los resultados experimentales deben considerarse con cuidado, ya que no permiten una comparación directa, sino solamente una estimación inicial de los alcances del modelo presentado. Además, es importante notar que, de acuerdo con los resultados experimentales previos, los cuatro aislantes se probaron con duraciones de impacto limitadas que no reflejan toda la gama de respuestas del espectro. De esta forma se propone como trabajo futuro, plantear una metodología experimental para someter los aislantes a carga cíclica, con desplazamiento controlado y cuantificar la fuerza de restauración histéretica, determinando los lazos de histéresis y aplicar una técnica adecuada de identificación y estimación de los parámetros del modelo de Bouc-Wen. Una vez estimados estos parámetros, se podrá obtener la respuesta de impacto teórica de acuerdo con las propiedades particulares de cada muestra estudiada, para reflejar sus propiedades de rigidez y amortiguamiento de manera completa. De esta forma se podrá establecer una comparación directa con mediciones experimentales, tomando como referencia la carga y deflexión óptima de los aislantes. Con este modelo calibrado con base en mediciones experimentales, en el futuro se proponen desarrollar nuevos modelos de aislantes vibratorios, construidos con resortes de cable, para hacer un mejor uso de sus propiedades no lineales y que estos sean fácilmente adaptables a diferentes condiciones de carga.

CONCLUSIONES

Se presentó una introducción sobre el aislamiento de vibraciones debidas a impactos, destacando el almace-

namiento de la energía del impacto por medios elásticos y posterior disipación. Se discutió el uso de los resortes de cable como aislantes de impactos destacando que presentan lazos de histéresis debido a sus propiedades no lineales en rigidez y amortiguamiento. Se introdujo el modelo de histéresis de Bouc-Wen, presentando varios lazos de histéresis para diferentes casos de rigidez y amortiguamiento. Posteriormente, se analizó la respuesta de impacto de aislantes modelados con este enfoque, considerando diferentes parámetros para representar rigidez con ablandamiento y endurecimiento. Se demostró que los sistemas que tienen una rigidez de tipo endurecimiento presentan mejores propiedades de aislamiento al impacto que los sistemas con ablandamiento, además de que los mayores efectos se observaron cuando la duración del impacto es similar al periodo natural del sistema, y para impactos de muy corta duración el efecto es nulo al ser muy similar a la respuesta lineal. Al incrementar el nivel de amplitud de entrada se encontró como resultado que existe una variación no proporcional en la respuesta que varía según el tipo de rigidez. De esta manera se concluye que un sistema aislante, con endurecimiento en la rigidez y amortiguamiento por histéresis, provee mejor aislamiento de impacto, incrementando su rendimiento aislante al aumentar los niveles de excitación. Debido a la versatilidad del modelo de Bouc-Wen para representar histéresis, se propone como trabajo a futuro la identificación experimental de los parámetros de los resortes de cable, para predecir de manera precisa la respuesta de impacto, y la posterior validación mediante experimentos bajo cargas impulsivas.

NOMENCLATURA

A	Parámetro de Bouc-Wen	\dot{z}	Primera derivada de la fuerza de histéresis
c	Constante de amortiguamiento viscoso	α	Parámetro de Bouc-Wen
k	Rigidez	β	Parámetro de BoucWen
m	Masa	γ	Razón de post cedencia a pre cedencia
n	Exponente de Bouc-Wen	η	Factor de pérdida
t	Tiempo	v	Respuesta de excitación impulsiva
T	Periodo natural	\dot{v}	Derivada de la respuesta impulsiva
u	Fuerza externa	\ddot{v}	Segunda derivada de la respuesta impulsiva
x	Desplazamiento	ξ_p	Amplitud de excitación impulsiva
\dot{x}	Velocidad	τ	Duración de excitación impulsiva
\ddot{x}	Aceleración	ω_n	Frecuencia natural
z	Fuerza de histéresis	ζ	Razón de amortiguamiento

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer el apoyo aportado por el CONACyT por medio del proyecto de Ciencia Básica CB 2010 152241, y a la Universidad Autónoma de Nuevo León por el apoyo PAICyT 2015.

REFERENCIAS

- Balaji, P.S., Moussa, L., Rahman, M.E., Ho, L.H. (2016). An analytical study on the static vertical stiffness of wire rope isolators. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 30 (1), 287-295. <http://dx.doi.org/10.1007/s12206-015-1232-5>
- Balaji, P.S., Moussa, L., Rahman, M.E., Vuia, L.T. (2015). Experimental investigation on the hysteresis behavior of the wire rope isolators. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 29(4), 1527-1536. Recuperado de <http://dx.doi.org/10.1007/s12206-015-0325-5>
- Balaji, P.S., Rahman, M.E., Moussa, L., Lau, H.H. (2015). Wire rope isolators for vibration isolation of equipment and structures – A review. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 78(1), 012001. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1757-899X/78/1/012001>
- Charalampakis, A. y Koumousis, V. (2008). Identification of Bouc-Wen hysteretic system by a hybrid evolutionary algorithm. *Journal of Sound and Vibration*, 314 (3), 571-585. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2008.01.018>
- Cutchins, M.A., Cochran, J.E., Kumar, K., Fitz-Coy, N.G., Tinker, M.L.(1987). Initial Investigations into the damping characteristics of wire rope vibration isolators. Technical Report 87-1, Auburn University, Aerospace Engineering.
- Demetriades, G.F., Constantinou, M.C., Reinhorn, A.M. (1993). Study of wire rope systems for seismic protection of equipment in buildings. *Engineering Structures*, 15(5), 321-334. [https://doi.org/10.1016/0141-0296\(93\)90036-4](https://doi.org/10.1016/0141-0296(93)90036-4)
- Eshleman, R.L. y Rao, P.N. (1969). Response of mechanical shock isolation elements to high rate input loading. *Shock and Vibration Bulletin*, Shock and Vibration Information Center.
- Gerges, R.R. y Vickery, B.J.(2003). Parametric experimental study of wire rope spring tuned mass dampers. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 91(12), 1363-1385. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jweia.2003.09.038>
- Guzmán-Nieto, M., Tapia-González, P.E., Ledezma-Ramírez, D.F. (2015). Low Frequency Experimental Analysis of Dry Friction Damping in Cable Isolators. *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, 34(4), 513–524. <https://doi.org/10.1260/2F0263-0923.34.4.513>
- Harris, C.M. y Piersol, A.G. (2002). *Harris' shock and vibration handbook*, 5a edición, Mc Graw Hill.
- Ledezma-Ramírez, D.F., Ferguson, N.S., Brennan, M.J., Tang, B. (2015). An experimental nonlinear low dynamic stiffness device for shock isolation. *Journal of Sound and Vibration*, 347, 1–13. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2015.02.006>
- Leenen, R. (2002). The modelling and identification of an hysteretic system, DCT 2002.7, Department of Mechanical Engineering - Eindhoven University of Technology.
- Li, H.-G. y Meng, G. (2007). Nonlinear dynamics of a SDOF oscillator with Bouc-Wen hysteresis. *Chaos, Solitons & Fractals*, 34(2), 337-343.
- Popp, K. (2000). Non-smooth mechanical systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 64(5), 765-772. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(00\)00106-4](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(00)00106-4)
- Schwanen, W. (2004). *Modeling and Identification of the dynamic behavior of a wire rope spring*, (Master Thesis), Technische Universiteit Eindhoven.
- Stratus Productions. (2017). Stratus Productions. Recuperado de <http://www.stratus-productions.com/cinema-vibration-damper>
- Tang, B. y Brennan, M.J. (2014). On the shock performance of a nonlinear vibration isolator with high-static-low-dynamic-stiffness. *International Journal of Mechanical Sciences*, 81, 207–214. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.02.019>
- Tapia-González, P.E. y Ledezma-Ramírez, D.F. (2017). Experimental characterisation of dry friction isolators for shock and vibration. *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, 36(1), 83-95. <https://doi.org/10.1177/2F0263092317693509>