Ingeniería Investigación y Tecnología
volumen XX (número 1), enero-marzo 2019 1-8
ISSN 2594-0732 FI-UNAM artículo arbitrado
Información del artículo: recibido: 13 de junio de 2017, aceptado: 16 de octubre de 2017

http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2019.20n1.010

Algoritmo para analizar decisiones con objetivos múltiples bajo incertidumbre
Algorithm to analyze decisions with multiple objectives under uncertainty

Acosta-Flores José Jesús
Facultad de Ingeniería. UNAM
División de Ingeniería Mecánica e Industrial
E-mail: jjaf@unam.mx
https://orcid.org/0000-0001-8101-5797

Resumen

El objeto de este artículo es presentar un algoritmo sencillo para el análisis de decisiones con objetivos múltiples e incertidumbre, donde interactúan un decisor y un analista. Este algoritmo está basado en la metodología del Análisis de Decisiones y consta de un conjunto de pasos que guían al analista. En algunos pasos el analista tendrá que efectuar cálculos y en otros interactuar con el decisor. Inicialmente recaba información que le permita detectar su tipo de comportamiento que puede ser de aversión, propensión o neutralidad al riesgo. Con dicha información y utilizando funciones densidad de probabilidad uniformes se transforma el problema con incertidumbre en uno determinista, pero continúa con los mismos objetivos del problema original. Después, el analista efectúa un análisis de dominancia para eliminar las alternativas que resulten inferiores a otras. Si después de efectuar dicho análisis quedara solo una alternativa, ella sería la solución. En caso contrario, interactúa con el decisor para efectuar las permutas compensatorias para eliminar una medida de efectividad. Después de haber eliminado esa medida de efectividad el analista regresa al análisis de dominancia. Continúan alternándose ambos análisis, el de dominancia y el de permutas compensatorias, hasta que solamente queda una alternativa. Una de las limitaciones del presente algoritmo es el uso de la función densidad de probabilidad uniforme, lo cual, no obstante, es válido ya que en situaciones de incertidumbre se desconoce la aplicabilidad de otro tipo de funciones de probabilidad. Otra de sus limitaciones es la existencia de un solo decisor. El algoritmo utiliza conceptos de la Teoría de decisiones, pero su desarrollo formal es original. Finalmente, se empleó un ejemplo hipotético para determinar la mejor localización de un aeropuerto para ilustrar el uso del algoritmo. Puede observarse en este ejemplo que además de los aspectos técnicos es posible considerar también otros aspectos relevantes.
Descriptores: Decisiones, objetivos múltiples, incertidumbre, funciones utilidad, equivalentes bajo certeza, criterios de dominancia, permutas compensatorias.

Abstract

The objective of this article is to present a simple algorithm for the analysis of decisions with multiple objectives and uncertainty where one decision maker and one analyst interact themselves. This algorithm is based on the methodology of Decision Analysis and consists of a set of steps that guide the analyst. In some steps he will have to make calculations and in others to interact with the decision maker. Initially he collects information that permits him to detect the behavior of the decision maker. This type of behavior may be risk aversion, risk prone or risk neutrality. With this information and using uniform probability functions the problem with uncertainty is transformed into one with certainty, but it continues with the same objectives of the original problem. Then the analyst performs a dominance analysis to eliminate the dominated alternatives. If after performing such analysis there were only one alternative, it would be the solution. If there are more than one alternative he interacts with the decision maker to perform even swaps in order to remove a measure of effectiveness. After he has removed it the analyst returns to the dominance analysis. They continue to alternate both analysis, the dominance and the even swaps, until we had only one alternative. One of the limitations of this algorithm is the use of only the uniform probability density function instead of others because they are unknown. Another of its limitations is the existence of a unique decision maker. We can say although the algorithm uses concepts of Decision Theory, its formal development is original. Finally, a hypothetical example was used to determine the best location of an airport to illustrate the use of the algorithm. We can observe in this example that in addition to the technical aspects it is possible to consider also other relevant aspects.
Keywords: Decisions, multiple objectives, uncertainty, utility functions, certainty equivalents, criteria of dominance, compensatory permutes.

http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2019.20n1.010

Introducción

En términos generales el término "algoritmo" es vago. En matemáticas, un algoritmo significa una sucesión de pasos estrictamente regulados, necesarios para resolver un problema. Por ejemplo, si el problema consistiese en determinar la raíz cuadrada de un número positivo, la serie de acciones que deben efectuarse para resolverlo constituiría un algoritmo, que en este caso sería un algoritmo matemático. Estos tipos de algoritmo son característicamente estrictos: cada paso es una acción que está precisamente determinada y no depende ni de las condiciones cambiantes del problema, ni de la personalidad de la persona que lo está resolviendo.

En su sentido más amplio, un algoritmo es un proceso que tiene un conjunto de acciones secuencialmente estructuradas (Altshuller, 2000). Esta es la razón por la que le llamamos algoritmo a los pasos que se van a presentar para elegir decisiones cuando se tienen objetivos múltiples e incertidumbre, diseñado para que las personas puedan sistematizar problemas reales e importantes.

En la mayoría de los problemas reales se tienen varios objetivos. Estos objetivos pueden estar en conflicto, es decir, que si se mejora el logro de uno empeora el de otro u otros. Es necesario entonces conocer mediante la evaluación de indicadores el logro de los objetivos. A dichos indicadores los vamos a denominar medidas de efectividad.

Cuando se analiza una acción habrá que pensar en las consecuencias posibles. Estas consecuencias incidirán en el logro de los objetivos y habrá que cuantificarlas mediante las medidas de efectividad.

Considérese un solo objetivo con una sola medida de efectividad, entonces, al analizar un curso de acción se tendrá un rango de valores posibles de dicha medida de efectividad. A ese rango de valores con sus probabilidades asociadas se le conoce como Lotería (L). Esos valores pueden ser continuos, discretos o una combinación de ambos. En el caso de varios objetivos, una Lotería tendrá como consecuencias vectores, cuyos componentes corresponden a las medidas de efectividad de esos objetivos, junto con sus probabilidades correspondientes.

Ahora bien, cuando al decisor le da lo mismo poseer una lotería que una cierta cantidad, a dicha cantidad se le denomina Equivalente Bajo Certeza (EBC). En otras palabras, es la mínima cantidad que el decisor está dispuesto a aceptar a cambio de una lotería que considera atractiva, o lo máximo que estaría dispuesto a pagar para no tener que afrontar una lotería que no siente atrayente.

A la función que mide la preferencia del decisor sobre diversos valores de la medida de efectividad x, se le denomina función utilidad y la representaremos como u(x).

Esta función será monotónicamente creciente cuando el decisor prefiera cantidades mayores de x. Por ejemplo, cuando x son ganancias; y monotónicamente decreciente cuando prefiera cantidades menores de x, como es el caso en que x represente costos.

Respecto a las loterías, el decisor puede sentir diversas actitudes al riesgo que pueden ser de aversión, propensión o neutralidad. Un decisor tiene aversión al riesgo cuando prefiere una lotería sobre su equivalente bajo certeza y propensión al revés, o sea, cuando prefiere el equivalente bajo certeza sobre la lotería asociada. Cuando la función utilidad es monotónicamente creciente y VE es el valor esperado de una lotería, entonces el decisor tiene aversión al riesgo cuando VE > EBC para todas las loterías; y propensión cuando EBC > VE. En el caso de que la función utilidad sea monotónicamente decreciente, se invierte la condición, es decir, se tendrá aversión cuando EBC > VE, y propensión cuando VE > EBC.

Keeney y Raiffa (1976) presentan las funciones utilidad que representan los comportamientos de aversión y propensión creciente, decreciente y constante. Posteriormente Keeney (1992) escribió que en todos sus años practicando el análisis de decisiones, encontró que siempre la aversión o propensión al riesgo de los decisores fue constante.

Por otra parte, señalaremos que se tienen decisiones con riesgo cuando se conocen las distribuciones de probabilidad de las medidas de efectividad (distribuciones diferentes a la uniforme) y decisiones con incertidumbre cuando no se conocen, es decir, cuando no hay evidencia que algún valor de la medida de efectividad tenga mayor posibilidad de ocurrencia que los otros. En este caso, la función densidad de probabilidad que describe dicha situación es la uniforme.

Un estado del arte del análisis de problemas con objetivos múltiples bajo riesgo se tiene en (Figueira *et al*., 2005) y algunas aplicaciones pueden consultarse en: Reilly *et al*. (2015); Guan y Shuang (2015); Baucells y Villasis (2015) y Gustafsson (2015).

En este artículo se considerará el análisis de problemas con objetivos múltiples bajo incertidumbre cuando las medidas de efectividad son continuas.

A continuación se presenta la función utilidad cuando el comportamiento del decisor es de aversión constante, neutralidad y propensión constante, después se desarrollan las ecuaciones que permiten calcular los equivalentes bajo certeza y posteriormente se presentará el Algoritmo que se propone.

http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2019.20n1.010

Funciones utilidad con comportamiento del decisor de aversión o propensión constante

En la Tabla 1, elaborada a partir del libro de Keeney y Raiffa (1976) se presentan las funciones utilidad que corresponden a comportamientos de aversión constante, neutralidad y propensión constante cuando dichas funciones son monotónicamente crecientes y cuando son monotónicamente decrecientes.

Equivalentes bajo certeza

Primero, se desarrollará la situación cuando el decisor tiene aversión constante al riesgo, su preferencia sobre la medida de efectividad es monotónicamente creciente y la función densidad de probabilidad es la uniforme. De la Tabla 1 se observa que en este caso la función utilidad $u(x)$ *es* $-e^{-cx}$.

Ahora bien, por definición, el decisor es indiferente entre el equivalente bajo certeza (EBC) y la lotería (L) asociada. Si es indiferente entre ellas, quiere decir que la utilidad que él percibe de EBC y L debe ser la misma, o sea:

$$u(EBC) = u(L) \tag{1}$$

La utilidad de una lotería se considera como la utilidad esperada de sus consecuencias x, luego:

$$u(L) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) f(x) dx$$

Donde f(x) es la función densidad de probabilidad uniforme. Matemáticamente, la función densidad de probabilidad uniforme es: f(x) = 1/(b-a) cuando los valores de la medida de efectividad x están entre a y b; y cero cuando están fuera de ese rango. Se considerará siempre que b es mayor que a.

Sustituyendo los valores de u(x) y de f(x), u(L) queda como la integral, cuyos límites son a y b, del producto $(-e^{-cx})(1/(b-a))dx$.

Calculando la integral se obtiene:

$$u(L) = (e^{-cb} - e^{-ca})/(c(b-a)) \tag{2}$$

sustituyendo la ecuación (2) en la ecuación (1) queda:

$$u(EBC) = (e^{-cb} - e^{-ca})/(c(b-a)) \tag{3}$$

por otra parte, conocemos que $u(EBC) = -e^{-cEBC}$ (4)

Teniendo presente (4) en (3), se obtiene:

$$-e^{-cEBC} = (e^{-cb} - e^{-ca})/(c(b-a)) \tag{5}$$

En la ecuación (5) se multiplicarán ambos términos por –1, se obtendrá el logaritmo natural en ambos lados, y se despejará EBC, lo que proporciona:

$$EBC = (-1/c)Ln((e^{-cb} - e^{-ca})/(c(a-b))$$

Haciendo desarrollos semejantes se obtuvieron los EBC para los cinco casos restantes, que se muestran en la Tabla 2.

Algoritmo para analizar decisiones con objetivos múltiples bajo incertidumbre

Parte uno: Definición de objetivos y medidas de efectividad:

Paso 1-1 Defina el horizonte de planeación, así como los objetivos.

Paso 1-2 Para cada objetivo, determine la o las medidas de efectividad que permitirán conocer el logro del mismo.

Tabla 1. Función utilidad u(x)

	Monotónica creciente	Monotónica decreciente
Aversión constante	$-e^{-cx}$	$-e^{cx}$
Neutralidad	x	-x
Propensión constante	e^{cx}	e^{-cx}

Tabla 2. Equivalentes bajo certeza, EBC

	u(x) es monotónica creciente	u(x) es monotónica decreciente
Aversión constante	$(-1/c)Ln((e^{-cb} - e^{-ca})/(c(a-b))$	$(1/c)Ln((e^{cb} - e^{ca})/(c(b-a))$
Neutralidad	(b + a)/2	(b + a)/2
Propensión constante	$(1/c)Ln((e^{cb} - e^{ca})/(c(b-a))$	$(-1/c)Ln((e^{-cb} - e^{-ca})/(c(a-b))$

http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2019.20n1.010

Paso 1-3 Establezca para todas las medidas de efectividad si son monotónicamente crecientes o decrecientes.

Parte dos: Estipulación de alternativas, funciones utilidad y parámetros:

Paso 2-1 Estipule las alternativas.
Paso 2-2 Para cada alternativa precise el límite inferior (a) y el límite superior (b) de cada medida de efectividad.
Paso 2-3 Para cada medida de efectividad calcule a* como el menor de todos los límites a; y b* como el mayor de los límites b.
Paso 2-4 Para cada medida de efectividad forme la lotería cuyas consecuencias son a* y b*, con probabilidades de 0.5 cada una. Pídale al decisor su equivalente bajo certeza (EBC) de cada una de esas loterías. Calcule el valor esperado (VE) de la lotería. Si la medida de efectividad es monotónica creciente y VE > EBC entonces se tiene aversión al riesgo; si VE = EBC, neutralidad al riesgo; y si VE < EBC propensión al riesgo. Si la medida de efectividad es monotónica decreciente y VE > EBC entonces se tiene propensión al riesgo; si VE = EBC, neutralidad al riesgo; y si VE < EBC aversión al riesgo. Conociendo lo anterior se determina, para cada medida de efectividad, su u(x) en la Tabla 1.
Paso 2-5 Para cada medida de efectividad con aversión o propensión al riesgo formule la ecuación $u(EBC) = 0.5u(a^*) + 0.5u(b^*)$, la cual es una ecuación con una sola incógnita, el parámetro c. Resuelva dicha ecuación.

Parte tres: Cálculo numérico de los equivalentes bajo certeza:

Paso 3-1 Para cada alternativa y para cada medida de efectividad se computa, usando los valores de a, b y c, el valor numérico del Equivalente Bajo Certeza (EBC) utilizando las fórmulas de la Tabla 2. Presente los resultados en una Tabla cuyos renglones sean las alternativas y cuyas columnas sean las medidas de efectividad.

Parte cuatro: Selección de la mejor alternativa:

Paso 4-1 Encuentre y elimine las alternativas dominadas. La alternativa A domina a la B cuando A es mejor que B en algunas medidas de efectividad y en todas las demás no es peor que B.
Paso 4-2 ¿Queda sólo una alternativa? en caso afirmativo, esa alternativa es la mejor opción y termina el algoritmo. Si no es así habrá que continuar con el Paso 4-3.
Paso 4-3 Haga permutas compensatorias para eliminar una medida de efectividad. Cuando se haya eliminado una medida de efectividad se regresa al Paso 4-1

Este paso está fundamentado en algo obvio, pero importante: si todas las alternativas se califican como iguales para una determinada medida de efectividad, dicha medida se puede omitir al elegir entre las diversas alternativas. Para hacer la permuta compensatoria (Hammond *et al*., 2000) se determina primero el cambio necesario para cancelar una medida de efectividad. Después, se ve si un cambio en otra medida podría compensar el cambio necesario y se hace la permuta.

A continuación se aplicará el algoritmo con un ejemplo hipotético.

Ejemplo hipotético. Selección del mejor sitio para localizar un aeropuerto

El crecimiento rápido de la demanda de viajes en avión, combinado con dificultades en las condiciones operativas del sitio donde se encuentra un aeropuerto, hicieron que los decisores pensaran sobre cómo debían ser las instalaciones aeroportuarias para asegurar un servicio adecuado para esa región durante el período que va de 2017 a 2040. A continuación se aplicará el algoritmo.

Parte uno: Definición de objetivos y medidas de efectividad:

Paso 1-1 Defina el horizonte de planeación, así como los objetivos.

El horizonte de planeación se consideró como el año 2040. Los objetivos considerados fueron:

O_1 = Minimizar los costos totales de construcción y de mantenimiento, durante el período del horizonte de planeación.
O_2 = Maximizar la capacidad para satisfacer la demanda de operaciones de aviones.
O_3 = Minimizar el tiempo de acceso al aeropuerto.
O_4 = Minimizar la disrupción social causada por la provisión de las nuevas instalaciones del aeropuerto.
O_5 = Minimizar los efectos de contaminación por ruido debido al tráfico aéreo.

Paso 1-2 Para cada objetivo, determine la o las medidas de efectividad que permitirán conocer el logro del mismo.

Se definió una medida de efectividad para cada objetivo, ME_1 para O_1, ME_2 para O_2 y así sucesivamente. Estas medidas se presentan a continuación:

ME_1= Costo total en millones de pesos, actualizando los costos a valores de 2017.
ME_2= Capacidad en número de aterrizajes y despe gues por hora.
ME_3= Tiempo promedio de acceso en minutos, desde las diferentes zonas al aeropuerto y del aeropuerto hacia esas zonas, ponderado por el nú mero de viajeros en cada zona.
ME_4 = Número de personas que hay que desplazar de sus hogares debido a la construcción del aero puerto.
ME_5= Número de personas sujetas a un ruido mayor a los 100 decibeles.

Paso 1-3 Establezca para todas las medidas de efectividad, si son monotónicamente crecientes o decrecientes.

Como es conveniente minimizar las medidas de efectividad 1, 3, 4 y 5, eso indica que ellas son monotónicamente decrecientes. En cuanto a la medida de efectividad 2, mientras mayor capacidad tengamos la preferimos más, por lo tanto, esa medida es monotónica creciente.

Parte dos: Estipulación de alternativas, funciones utilidad y parámetros:

Paso 2-1 Estipule las alternativas.

En este ejemplo se tienen cuatro sitios diferentes donde podría situarse el aeropuerto. A_1 representa la alternativa donde el aeropuerto se sitúa en el sitio 1; A_2, en el sitio 2; A_3 en el sitio 3; y A_4, en el sitio 4.

Paso 2-2 Para cada alternativa precise el límite inferior (a) y el límite superior (b) de cada medida de efectividad.

Los resultados de este Paso se presentan en la Tabla 3.

Paso 2-3 Para cada medida de efectividad calcule a* como el menor de todos los límites a; y b* como el mayor de los límites b.

Estos valores se muestran en el último renglón de la Tabla 4.

Paso 2-4 Para cada medida de efectividad forme la lotería cuyas consecuencias son a* y b*, con probabilidades de 0.5 cada una. Pídale al decisor su Equivalente Bajo Certeza (EBC) de cada una de esas loterías. Calcule el valor esperado (VE) de la lotería. Si la medida de efectividad es monotónica creciente y VE > EBC entonces se tiene aversión al riesgo; si VE = EBC, neutralidad al riesgo; y si VE < EBC propensión al riesgo. Si la medida de efectividad es monotónica decreciente y VE >

Tabla 3. Valores de los límites a y b

Alternativas	Medidas de efectividad									
	ME_1 (millones de pesos)		ME_2 (operaciones por hora)		ME_3 (minutos)		ME_4 (número de personas)		ME_5 (miles de personas)	
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
A_1	500	4000	50	130	12	90	2500	250000	400	700
A_2	700	3500	80	200	15	50	20000	100000	700	1400
A_3	400	2000	100	250	20	40	40000	120000	800	1500
A_4	1000	3000	60	140	40	100	100000	200000	600	900

Tabla 4. Valores de a* y b*

Alternativas	Medidas de efectividad									
	ME_1 (millones de pesos)		ME_2 (operaciones por hora)		ME_3 (minutos)		ME_4 (número de personas)		ME_5 (miles de personas)	
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
A_1	500	4000	50	130	12	90	2500	250000	400	700
A_2	700	3500	80	200	15	50	20000	100000	700	1400
A_3	400	2000	100	250	20	40	40000	120000	800	1500
A_4	1000	3000	60	140	40	100	100000	200000	600	900
	a* = 400	b* = 4000	a* = 50	b* = 250	a* = 12	b* = 100	a* = 2500	b* = 250000	a* = 400	b* = 1500

http://dx.doi.org/10.22201/fi.25940732e.2019.20n1.010

EBC entonces se tiene propensión al riesgo; si VE = EBC, neutralidad al riesgo; y si VE < EBC aversión al riesgo. Conociendo lo anterior determine, para cada medida de efectividad, su u(x) en la Tabla 1

Medida de efectividad 1. Se forma la lotería cuyos valores son 400 y 4000 millones de pesos con probabilidades de 0.5 cada uno. Se le pregunta al decisor cuál es su equivalente bajo certeza para esta lotería, es decir, cuál es la máxima cantidad que estaría dispuesto a pagar a cambio de la lotería. Suponga que su respuesta fue EBC = 2500 millones de pesos. El valor esperado VE de la lotería se calcula como (0.5)(400) + (0.5)(4000) = 2200. Como la medida de efectividad es monotónica decreciente, o sea, que un costo mayor se prefiere menos, y VE < EBC se trata de un comportamiento de aversión al riesgo. Por lo tanto, de la Tabla 1 se obtiene que u(x) para esta medida de efectividad es $-e^{cx}$

Medida de efectividad 2. Se forma la lotería cuyos valores son 50 y 250 operaciones por hora con probabilidades de 0.5 cada una. Se le pregunta al decisor cuál es su equivalente bajo certeza para esta lotería, es decir, cuál es la mínima cantidad que estaría dispuesto a aceptar a cambio de la lotería. Suponga que su respuesta fue EBC = 100 operaciones por hora. El valor esperado VE de la lotería se calcula como (0.5)(50) + (0.5)(250) = 150. Como la medida de efectividad es monotónica creciente, o sea, que se prefiere más una capacidad mayor, y VE > EBC se trata de un comportamiento de aversión al riesgo. Por lo tanto, de la Tabla 1 se obtiene que u(x) para esta medida de efectividad es $–e^{-cx}$

Medida de efectividad 3. Se forma la lotería cuyos valores son 12 y 100 minutos con probabilidades de 0.5 cada uno. Se le pregunta al decisor cuál es su equivalente bajo certeza para esta lotería, es decir, cuál es la máxima cantidad de tiempo que estaría dispuesto a aceptar a cambio de la lotería. Suponga que su respuesta fue EBC = 56 minutos. El valor esperado VE de la lotería se calcula como (0.5)(12) + (0.5)(100) = 56. Como la medida de efectividad es monotónica decreciente, o sea, que un tiempo mayor se prefiere menos, y VE = EBC se trata de un comportamiento de neutralidad al riesgo. Por lo tanto, de la Tabla 1 se obtiene que u(x) para esta medida de efectividad es -x

Medida de efectividad 4. Se forma la lotería cuyos valores son 2500 y 250000 personas, con probabilidades de 0.5 cada uno. Se le pregunta al decisor cuál es su equivalente bajo certeza para esta lotería, es decir, cuál es la máxima cantidad de personas desplazadas que estaría dispuesto a aceptar a cambio de la lotería. Suponga que su respuesta fue EBC = 150000 personas desplazadas. El valor esperado VE de la lotería se calcula como (0.5)(2500) + (0.5)(250000) = 126250. Como la medida de efectividad es monotónica decreciente, o sea, que tener que desplazar un mayor número de personas de sus hogares se prefiere menos, y VE < EBC se trata de un comportamiento de aversión al riesgo. Por lo tanto, de la Tabla 1 se obtiene que u(x) para esta medida de efectividad es $-e^{cx}$

Medida de efectividad 5. Se forma la lotería cuyos valores son 400 y 1500 miles de personas con probabilidades de 0.5 cada uno. Se le pregunta al decisor cuál es su equivalente bajo certeza para esta lotería, es decir, cuál es la máxima cantidad de miles de personas afectadas por el ruido que estaría dispuesto a aceptar a cambio de la lotería. Suponga que su respuesta fue EBC = 800 miles de personas. El valor esperado VE de la lotería se calcula como (0.5)(400) + (0.5)(1500) = 950. Como la medida de efectividad es monotónica decreciente, o sea, que un número mayor de personas afectadas por el ruido se prefiere menos, y VE > EBC se trata de un comportamiento de propensión al riesgo. Por lo tanto, de la Tabla 1 se obtiene que u(x) para esta medida de efectividad es e^{-cx}

Paso 2-5 Para cada medida de efectividad con aversión o propensión al riesgo, formule la ecuación u(EBC) = 0.5u(a*) + 0.5u(b*), la cual es una ecuación con una sola incógnita, el parámetro c que debe ser mayor que cero. Resuelva dicha ecuación.

Medida de efectividad 1. Como $u(x) = -e^{cx}$, EBC = 2500, a* = 400 y b* = 4000, entonces u(EBC) = 0.5u(a*) + 0.5u(b*) queda $–e^{2500c} = 0.5(-e^{400c}) + 0.5(-e^{4000c})$; resolviendo la ecuación se obtiene c = 0.00019

Medida de efectividad 2. Como $u(x) = -e^{-cx}$, EBC = 100, a* = 50 y b* = 250, entonces u(EBC) = 0.5u(a*) + 0.5u(b*) queda $–e^{-100c} = 0.5(-e^{-50c}) + 0.5(-e^{-250c})$; resolviendo la ecuación se obtiene c = 0.0122

Medida de efectividad 3. Como esta medida tiene neutralidad al riesgo u(x) = -x que no tiene al parámetro c.

Medida de efectividad 4. Como $u(x) = -e^{cx}$, EBC = 150000, a* = 2500 y b* = 250000, entonces u(EBC) = 0.5u(a*) + 0.5u(b*) queda $– e^{150000c} = 0.5(-e^{2500c}) + 0.5(-e^{250000c})$; resolviendo la ecuación se obtiene c = 0.00000001

Medida de efectividad 5. Como $u(x) = e^{-cx}$, EBC = 800, a* = 400 y b* = 1500, entonces u(EBC) = 0.5u(a*) + 0.5u(b*) queda $e^{-800c} = 0.5(e^{-400c}) + 0.5(e^{-1500c})$; resolviendo la ecuación se obtiene c = 0.001045

Parte tres: Cálculo numérico de los equivalentes bajo certeza

Paso 3-1 Para cada alternativa y para cada medida de efectividad compute, usando los valores de a, b y c, el valor numérico del equivalente bajo certeza (EBC) utilizando las fórmulas de la Tabla 2. Presente los resultados en una tabla cuyos renglones sean las alternativas y cuyas columnas sean las medidas de efectividad.

Los valores calculados se muestran en la Tabla 5.

Parte cuatro: Selección de la mejor alternativa

Paso 4-1 Encuentre y elimine las alternativas dominadas. La alternativa A domina a la B cuando A es mejor que B en algunas medidas de efectividad y en todas los demás no es peor que B.

Ninguna alternativa domina alguna otra, por lo que continuamos con el Paso 4-2

Paso 4-2 ¿Queda sólo una alternativa? en caso afirmativo, esa alternativa es la mejor opción y termina el algoritmo. Si no es así habrá que continuar con el Paso 4-3.

Quedan todavía las cuatro alternativas, por lo que continuaremos con el Paso 4-3

Paso 4-3 Haga permutas compensatorias para eliminar una medida de efectividad. Cuando se haya eliminado una medida de efectividad se regresa al Paso 4-1

Si deseamos que todas las alternativas estén con 546 miles de personas afectadas por el ruido, en la alternativa A2 debemos pasar de 1029 a 546, el decisor estaría dispuesto a que el costo total se incrementara en 563 millones para conseguirlo; en la alternativa A3 para pasar de 1129 a 546, estaría dispuesto a que el costo total se incrementara en 583 millones; y en la A4, para pasar de 746 a 546, estaría dispuesto a aceptar un incremento en el costo total de 200 millones. Lo anterior queda plasmado en la Tabla 6.

Tabla 5. Equivalentes bajo certeza

Alternativas	Medidas de efectividad				
	ME1	ME2	ME3	ME4	ME5
A1	2347	87	51	126276	546
A2	2162	133	32.5	60003	1029
A3	1220	164	30	80003	1129
A4	2032	97	70	150004	746

Tabla 6. Equivalentes bajo certeza

Alternativas	Medidas de efectividad				
	ME1	ME2	ME3	ME4	ME5
A1	2347	87	51	126276	546
A2	2162 + 563 = 2725	133	32.5	60003	546
A3	1220 + 583 = 1803	164	30	80003	546
A4	2032 + 200 = 2232	97	70	150004	546

En la Tabla 6 se observa que ahora es posible eliminar la medida de efectividad ME5. Regresamos al Paso 4-1.

Paso 4-1 Encuentre y elimine las alternativas dominadas. La alternativa A domina a la B cuando A es mejor que B en algunas medidas de efectividad y en todas los demás no es peor que B.

La alternativa A3 domina a las alternativas A1 y A4, por lo que pueden eliminarse. Quedando así la Tabla 7.

Paso 4-2 ¿Queda sólo una alternativa? en caso afirmativo, esa alternativa es la mejor opción y termina el algoritmo. Si no es así habrá que continuar con el Paso 4-3.

Quedan todavía dos alternativas, por lo que continuaremos con el Paso 4-3.

Paso 4-3 Haga permutas compensatorias para eliminar una medida de efectividad. Cuando se haya eliminado una medida de efectividad se regresa al Paso 4-1.

Si se deseara que ambas alternativas estuvieran con 60003 personas desplazadas, en la alternativa A3 se debería pasar de 80003 a 60003, para ello, el decisor estaría dispuesto a que el costo total se incrementara en 200 millones de pesos. Lo anterior queda plasmado en la Tabla 8.

En la Tabla 8 se observa que ahora es posible eliminar la medida de efectividad ME4. Regresamos al Paso 4-1.

Paso 4-1 Encuentre y elimine las alternativas dominadas. La alternativa A domina a la B cuando A es mejor que B en algunas medidas de efectividad y en todas los demás no es peor que B.

Tabla 7. Equivalentes bajo certeza

Alternativas	Medidas de efectividad			
	ME1	ME2	ME3	ME4
A2	2725	133	32.5	60003
A3	1803	164	30	80003

Tabla 8. Equivalentes bajo certeza

Alternativas	Medidas de efectividad			
	ME1	ME2	ME3	ME4
A2	2725	133	32.5	60003
A3	1803 + 200 = 2003	164	30	60003

Ahora la alternativa A3 domina a la A2. Por lo que se elimina A2. En el Paso 4-2 preguntan si existe solo una alternativa. La contestación a dicha pregunta es afirmativa, por lo que A3 es el mejor sitio para localizar el aeropuerto.

Conclusiones

En un mundo incierto el decisor responsable debe balancear juicios sobre incertidumbres con sus preferencias para consecuencias posibles. En este artículo se sugirió un algoritmo formal que será útil en este proceso de toma de decisiones.

Con este algoritmo no se describe cómo se han tomado las decisiones en el pasado, sino que se prescribe lo que deberá hacerse.

En la Tabla 2 donde se dedujeron las ecuaciones que permiten el cálculo de los equivalentes bajo certeza, se ha supuesto que las medidas de efectividad son continuas y que suceden conforme a una función densidad de probabilidad uniforme. Si esas medidas de efectividad fuesen discretas, en lugar de funciones densidad de probabilidad se tendrían funciones masa de probabilidad, pero el procedimiento utilizado para la obtención de dicha Tabla seguiría siendo válido, solo que se tendrían que usar sumatorias en lugar de integrales. De igual manera, si algunas funciones densidad fuesen diferentes a la uniforme, no puede emplearse la Tabla 2, pero sí el procedimiento utilizado para elaborarla, usando la función densidad correspondiente.

En el Paso 2-4 se solicita que para cada medida de efectividad se forme la lotería cuyas consecuencias son a* y b* con probabilidades de 0.5 cada una y se le pide al decisor el equivalente bajo certeza (EBC) de cada una de esas loterías. Dichos valores EBC, que dará en un momento y circunstancias determinados definirán si el decisor tiene un comportamiento de aversión, neutralidad o propensión al riesgo y por tanto, en función de dichos valores se obtendrá la solución. Si dichos valores cambian puede tenerse una solución diferente. Es conveniente entonces realizar un análisis de sensibilidad para encontrar los rangos de los EBC donde no cambia la solución y presentar dichos rangos al decisor para que tenga confianza en el resultado si sus valores están dentro de dicho rango, ya que aunque dé un valor diferente de EBC al día siguiente, ello no afectará dicho resultado. En este artículo no se presenta cómo realizar análisis de sensibilidad, ya que será el tema del artículo siguiente.

Referencias

Altshuller G. (2000) The innovation algorithm. Technical Innovation Center, Inc. USA.

Baucells-Manel, V.A. (2015) Equal tails: a simple method to elicit utility under violations of expected utility,12(4), pp. 190-204. Recuperado de http://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/deca.2015.0320

Figueira, J. y Salvatore-Greco, M.E. (2005). *Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys*. New York: Springer Science + Business Media, Inc.

Guan-Peiqiu, Z.J. (2015). Modeling Public–private partnerships in disaster management via centralized and decentralized, *Models*, 12(4), pp. 173-189. https://pubsonline.informs.org/doi/http://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/deca.2015.0319abs/10.1287/deca.2015.0320

Gustafsson J. (2015). *Theory of generalized risk attitudes.* 12(4), pp. 205-227 https://doi.org/10.1287/deca.2015.0322

Hammond J.S., Keeney R.L., Raiffa H. (2000). Decisiones inteligentes, Gestión 2000.

Keeney R.L. (1992). *Value-focused thinking. A Path to Creative Decisionmaking:* Harvard University Press.

Keeney R.L. y Raiffa H. (1976). *Decisions with multiple objectives: preferences and value tradeoffs*: John Wiley & Sons.

Reilly A.C., Samuel A., Guikema S.D. (2015). Gaming the system: decision making by interdependent critical infrastructure 12(4), pp. 155-172. Recuperado de https://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/deca.2015.0318