



Control pasivo de vibraciones verticales inducidas por personas en puentes peatonales Passive control of human-induced vertical vibrations on footbridges

Huergo-Rios Ivan Francisco

Universidad Nacional Autónoma de México

Correo: ing.huergo@hotmail.com

<https://orcid.org/0000-0001-9122-4832>

Hernández-Barrios Hugo

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ingeniería Civil (Estructuras)

Correo: hugofernandezbarrios@yahoo.com.mx

<https://orcid.org/0000-0001-8515-5965>

Resumen

Los puentes peatonales actuales son estructuras cada vez más esbeltas y flexibles, lo que ocasiona que estos sean más propensos a las vibraciones verticales inducidas por personas. En México no existen normas de diseño para la revisión del estado límite de servicio de este tipo de estructuras, lo que ocasiona que muchos peatones dejen de utilizarlos para cruzar vialidades. En este artículo se estudian tres puentes peatonales existentes en México, los cuales son modelados mediante vigas continuas tipo Euler-Bernoulli sometidas a cargas verticales peatonales en movimiento. Se observa que estos puentes no cumplen con los límites de confort establecidos en las normas internacionales, por lo que se diseña un sistema de control de vibraciones verticales basado en amortiguadores de masa sintonizada (AMS) para cada uno de ellos.

Descriptores: Puentes peatonales, condiciones de servicio, viga continua Euler-Bernoulli, vibraciones verticales, cargas peatonales móviles, amortiguadores de masa sintonizada.

Abstract

The current footbridges are increasingly slender and flexible structures, which makes them more prone to human-induced vertical vibrations. In Mexico, there are no design regulations for the revision of the serviceability limit state of this type of structures, which causes many pedestrians to stop using them to cross roads. This paper studies three footbridges existing in Mexico, which are modeled by continuous Euler-Bernoulli beams subjected to moving vertical pedestrian loads. It is observed that these bridges do not comply with the serviceability limit states established in international standards, for which reason a vertical vibration control system based on tuned mass dampers (TMD) is designed for each one of them.

Keywords: Footbridges, serviceability limit state, continuous Euler-Bernoulli beam, vertical vibrations, moving pedestrian loads, tuned mass dampers.

INTRODUCCIÓN

Un puente peatonal es una estructura que permite el paso de las personas sobre vías de tránsito vehicular o cuerpos de agua, razón por la cual existe gran demanda de este tipo de estructuras. Los puentes peatonales deben ser capaces de soportar cargas muertas, vivas y accidentales, de tal manera que se satisfaga tanto el estado límite último como el de servicio. El constante crecimiento de las ciudades requiere cada vez de más infraestructura de transporte y particularmente de puentes peatonales, sin embargo, la nueva tendencia estética consiste en diseñar puentes peatonales más esbeltos y flexibles que son más propensos a las vibraciones inducidas por peatones.

En la Ciudad de México como en los estados de la República Mexicana, no existe una reglamentación de diseño estructural para puentes peatonales, lo cual genera que no exista una homogeneidad en los criterios de diseño a emplearse. Lo anterior es incongruente, ya que en las Normas Técnicas Complementarias de Diseño por sismo de la Ciudad de México (NTC, 2017) se clasifican los puentes peatonales como estructuras del Grupo A.

Generalmente, durante el proceso de diseño se considera el efecto del paso de los peatones por medio de una carga estática uniformemente distribuida del orden de 4900 N/m^2 que representa el peso de los peatones sobre el tablero del puente y no se considera el efecto de la carga dinámica que produce el peatón durante su movimiento. Particularmente en la práctica ingenieril mexicana se ignora la revisión del estado límite de servicio de estas estructuras, lo cual ha ocasionado que muchos puentes peatonales presenten vibraciones excesivas que promueven el desuso de los mismos, incrementando así los accidentes por atropellamiento.

Las normas internacionales actuales para diseño de puentes peatonales proponen revisar el estado límite de servicio ante vibraciones inducidas por peatones, ya que estos generan frecuencias armónicas que pueden coincidir con alguna de las frecuencias estructurales, y por lo tanto provocar vibraciones resonantes que pueden exceder el nivel de confort soportado por el ser humano. Con el objetivo de evitar vibraciones resonantes, dichas normas recomiendan que los modos principales de vibración de los puentes peatonales estén fuera de los intervalos de frecuencia de paso típico de los peatones (Huergo, 2016).

Existen muchos parámetros que afectan la sensibilidad humana, tales como la posición en la que se encuentra la persona, la dirección de incidencia respecto a la columna vertebral, la actividad que se esté realizan-

do, la edad, el sexo, etcétera. Para el caso de la vibración vertical puede tomarse como aceleración límite de confort un valor promedio de 0.7 m/s^2 . Las normas consideran que se satisface el estado límite de servicio cuando las aceleraciones verticales son menores a dicho valor.

La mayoría de las normas internacionales proponen fórmulas simplificadas para obtener la respuesta dinámica de los puentes peatonales ante el paso de los usuarios, sin embargo, estas no consideran el comportamiento dinámico de los peatones, las condiciones de apoyo del puente, ni la contribución de los modos superiores de vibración; razón por la cual es conveniente utilizar modelos matemáticos más completos para representar adecuadamente dichos efectos.

CRITERIOS DE CONFORT

Las normas internacionales establecen que principalmente la condición que se debe evitar en el diseño de puentes peatonales es que las frecuencias de vibración de la estructura coincidan con las frecuencias de paso de la excitación peatonal; ya que esto podría generar la presencia de un acoplamiento dinámico similar al fenómeno de resonancia. Durante la etapa de diseño esto no siempre es posible de lograr, ya que las frecuencias de vibración de la estructura dependen en gran medida del claro del puente. Ante esta situación, las normas de diseño establecen que las aceleraciones inducidas por peatones no deben rebasar ciertos límites de confort establecidos en ellas. Las frecuencias críticas y aceleraciones límites de confort contempladas por algunas normas internacionales de diseño se muestran en la Tabla 1.

En la Tabla 1, $f_{v,1}$ es la frecuencia de vibración del modo 1 del puente peatonal en la dirección vertical y $f_{h,1}$ es la frecuencia de vibración del modo 1 del puente peatonal en la dirección horizontal. Las normas de diseño internacionales sugieren que las frecuencias críticas en la dirección longitudinal pueden tomarse igual a las de la dirección vertical. El límite de aceleración vertical y longitudinal establecido por las normas puede tomarse igual a 0.7 m/s^2 , mientras que para la dirección horizontal puede tomarse igual a 0.2 m/s^2 .

MODELO DE CARGA PEATONAL

Los movimientos rítmicos del cuerpo humano con una duración de hasta 20 s o más, conllevan a fuerzas dinámicas casi periódicas. En la Figura 1 se muestran los patrones típicos de fuerza peatonal en la dirección vertical (Wheeler, 1982).

En la mayoría de los casos, la vibración en puentes peatonales se trata de un problema de vibración forza-

Tabla 1. Frecuencias estructurales críticas y límites de aceleración de confort (Huergo, 2016)

Normas	Intervalo de frecuencias estructurales críticas (Hz)		Límites de aceleración de confort (m/s ²)	
	Vertical	Horizontal	Vertical	Horizontal
Eurocódigo 0- Anexo 2 (EN 1990-Annex A2)	< 5.0	< 2.5	0.7	0.2 (0.4)
Eurocódigo 1 (EN 1991)	< 5.0	< 2.5	min (0.5 $f_{V,1}^{0.5}$, 0.7)	min (0.14 $f_{H,1}^{0.5}$, 0.15)
Eurocódigo 2 (ENV 1992-2)	1.6 – 2.4	0.8 – 1.2	-----	-----
Eurocódigo 5 (ENV 1995-2)	< 5.0	< 2.5	0.7	0.2
RPX95, RPM95 (España)	-----	-----	0.5 $f_{V,1}^{0.5}$	-----
EAE (España)	1.6 – 2.4 3.5 – 4.5	0.6 – 1.2	min (0.5 $f_{V,1}^{0.5}$, 0.7)	0.2 (0.4)
BS 5400 (Reino Unido)	< 5.0	-----	0.5 $f_{V,1}^{0.5}$	-----
Din-Fachberitch 102 (Alemania)	1.6 – 2.4 3.5 – 4.5	-----	0.5 $f_{V,1}^{0.5}$	-----
SIA 260 (Suiza)	1.6 – 4.5	< 1.3	-----	-----
AASHTO 1997 (USA)	< 3	-----	-----	-----
ONT83 (Canadá)	-----	-----	0.25 $f_{V,1}^{0.39}$	-----
Austroads (Australia)	1.5 – 3	-----	-----	-----
Norma japonesa de puentes peatonales	1.5 – 2.3	-----	1	-----
ISO 10137 (2007)	1.7 – 2.3	-----	60x (Curva base ISO 2631-2)	-----
HIVOSS (2008)	1.25 – 2.3	0.5 – 1.2	0.5	0.1
CEB 209 Bulletin	1.65 – 2.35	0.8 – 1.2	-----	-----
VDI 2057	-----	-----	0.6 $f_{V,1}$	0.214
AISC Guide 11	-----	-----	100x (Curva base ISO 2631-2)	-----

da causada por el paso de los peatones sobre estas estructuras. La fuerza dinámica ejercida por un peatón

puede descomponerse en tres componentes ortogonales (Figura 2): fuerza vertical, $F_V(t)$, fuerza horizontal, $F_H(t)$, y fuerza longitudinal, $F_L(t)$.

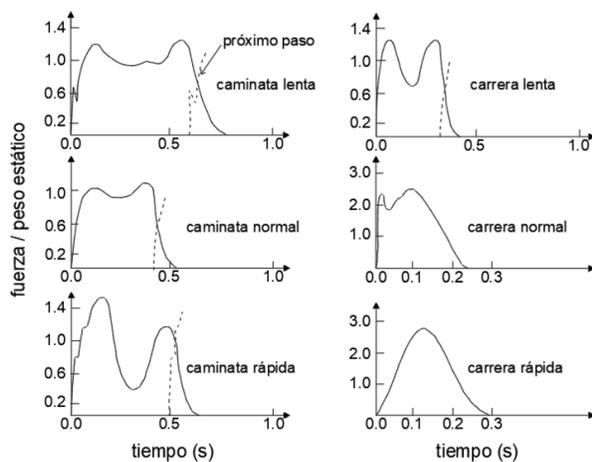


Figura 1. Patrones típicos de fuerza peatonal en la dirección vertical

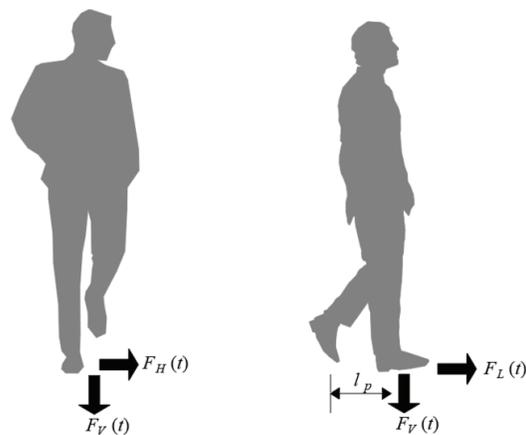


Figura 2. Descomposición ortogonal de la fuerza dinámica peatonal

La excitación dinámica que produce un peatón a un ritmo de caminata normal tiene una frecuencia vertical de vibración de 2 Hz con una desviación estándar de 0.175 Hz. Esto significa que 95 % de los peatones caminan con frecuencias verticales de vibración de entre 1.65 Hz y 2.35 Hz. En ocasiones los peatones suelen correr sobre estas estructuras ejerciendo frecuencias verticales de vibración de hasta 3.5 Hz, pero usualmente no más allá de dicho valor. En la Tabla 2 se muestran las velocidades y frecuencias más probables a ser desarrolladas por los peatones.

Las componentes ortogonales de fuerza peatonal (Figura 2) pueden representarse mediante series de Fourier debido a su naturaleza periódica, de tal manera que:

$$F_V(t) = P + P_0 \sum_{i=1}^n \alpha_{i,v} \text{sen}(2\pi i f_v t - \varphi_i) \tag{1}$$

$$F_H(t) = P_0 \sum_{i=1}^n \alpha_{i,H} \text{sen}(2\pi i f_H t - \varphi_i) \tag{2}$$

$$F_L(t) = P_0 \sum_{i=1}^n \alpha_{i,L} \text{sen}(2\pi i f_L t - \varphi_i) \tag{3}$$

Donde:

$$P = n_p G \tag{4}$$

$$P_0 = G n_{eff} \psi \tag{5}$$

y donde:

f_v, f_H y f_L = frecuencias de paso ejercidas por los peatones en Hz para la dirección vertical, horizontal y longitudinal, respectivamente (Tabla 2)

$\alpha_{i,v}, \alpha_{i,H}$ y $\alpha_{i,L}$ = coeficientes de Fourier del i -ésimo armónico para la dirección vertical, horizontal y longitudinal, respectivamente

n = número total de contribuciones armónicas

t = tiempo

φ_i = ángulo de fase en radianes del i -ésimo armónico

n_p = número total de peatones que conforman la carga

G = peso promedio de un peatón ($G \approx 700$ N)

n_{eff} = número efectivo de peatones

ψ = coeficiente de reducción de la carga peatonal

Los coeficientes de Fourier y ángulos de fase correspondientes se muestran en la Tabla 3.

El número efectivo de peatones puede interpretarse como un factor de sincronización y se calcula con base en el supuesto probabilístico de que el número de peatones que camina en sintonía con la frecuencia natural de vibración del puente produce 95 % de la aceleración pico debido a corrientes de peatones aleatorias. El número efectivo de peatones se puede obtener de la Tabla 4, recomendándose usar las expresiones propuestas por las normas Sétra (2006) e HIVOSS (2008).

El valor de ξ en la Tabla 4 es la fracción de amortiguamiento crítico del puente peatonal, la cual puede obtenerse de la Tabla 5.

El coeficiente de reducción de la carga peatonal representa la probabilidad de ocurrencia de las frecuencias de paso de los peatones (Figura 3).

El número total de peatones a utilizar en las ecuaciones (1) a (3) depende del uso del puente peatonal,

Tabla 2. Velocidades y frecuencias de paso ejercidas por un peatón (Bachmann et al., 1995)

Actividad peatonal	Velocidad (m/s)	Frecuencia peatonal		
		Vertical (Hz)	Horizontal (Hz)	Longitudinal (Hz)
Caminata lenta	1.1	1.7	0.85	1.7
Caminata normal	1.5	2.0	1.0	2.0
Caminata rápida	2.2	2.3	1.15	2.3
Carrera lenta	2.5	2.1	1.05	2.1
Carrera normal	3.3	2.5	1.25	2.5
Carrera rápida	5.5	3.2	1.6	3.2

Tabla 3. Coeficientes de Fourier y ángulos de fase (Bachmann et al., 1995)

Actividad peatonal	Frecuencia peatonal	Primer armónico		Segundo armónico		Tercer armónico		n_p / m^2	
		α_1	φ_1	α_2	φ_2	α_3	φ_3		
Caminata	Vertical	2.0 / 2.4 Hz	0.40/0.5	0.0	0.10	$\pi / 2$	0.10	$\pi / 2$	~1
	Horizontal	1.0 Hz	0.10	0.0	0.10	$\pi / 2$	0.10	$\pi / 2$	
	Longitudinal	2.0 Hz	0.20	0.0	0.10	-	-	-	
Carrera	2.0 a 3.0 Hz		1.60	0.0	0.70	-	0.20	-	-

Tabla 4. Número efectivo de peatones

Norma de diseño	n_p / m^2	n_{eff}
(ISO10137, 2007)	-	$\sqrt{n_p}$
(Sétra, 2006)	< 1.0	$10.8 \sqrt{n_p} \xi$
(HIVOSS, 2008)	≥ 1.0	$1.85 \sqrt{n_p}$

Tabla 5. Valores comunes de amortiguamiento estructural para puentes peatonales

Tipo de construcción	ξ					
	(Bachmann <i>et al.</i> , 1995)		(Sétra, 2006)		(HIVOSS, 2008)	
	Mínimo	Medio	Mínimo	Medio	Mínimo	Medio
Concreto reforzado	0.008	0.013	0.008	0.013	0.008	0.013
Concreto pretensado	0.005	0.010	0.005	0.010	0.005	0.010
Acero	0.002	0.004	0.002	0.004	0.002	0.004
Compuesto (concreto-acero)	0.003	0.006	0.003	0.006	0.003	0.006
Madera	-	-	0.015	0.030	0.010	0.015

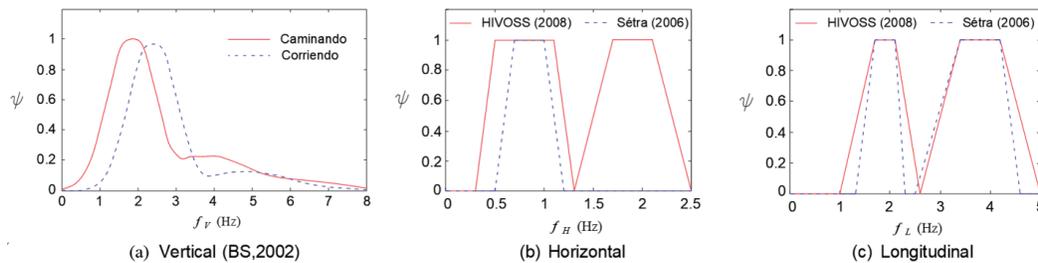


Figura 3. Coeficientes de reducción de la carga peatonal

para lo cual pueden utilizarse los casos de carga mostrados en la Tabla 6.

VIGA EULER-BERNOULLI CON AMORTIGUADORES DE MASA SINTONIZADA

Los puentes peatonales suelen ser más susceptibles de vibraciones resonantes en la dirección vertical en comparación con las vibraciones inducidas por peatones en la dirección horizontal y longitudinal. Una de las medidas más económicas y efectivas para controlar las vi-

braciones verticales resonantes en puentes peatonales es la utilización de amortiguadores de masa sintonizada. Un amortiguador de masa sintonizada (AMS) es un sistema oscilatorio secundario, habitualmente compuesto por una masa conectada a la estructura principal a través de resortes. Estos dispositivos se sintonizan con la frecuencia estructural del modo de vibración que se desea controlar y deben situarse en los puntos de máxima amplitud modal de dicho modo de vibración; su rendimiento en resonancia es elevado y requieren poco mantenimiento.

Tabla 6. Clasificación de puentes peatonales (BS, 2002)

Clase de puente	Uso de puente	n_p	
		Caminando	Corriendo
A	Localidades rurales poco pobladas	2	0
B	Ubicación suburbana sujeta a poca variación en el uso diario	4	1
C	Rutas urbanas sujetas a variación importante en el uso diario	8	2
D	Accesos primarios a estadios deportivos o grandes servicios de transporte público	16	4

Los puentes peatonales son estructuras esbeltas cuyo comportamiento dinámico es principalmente a flexión vertical, por lo que pueden representarse como vigas continuas Euler-Bernoulli. Para plantear la ecuación diferencial de movimiento es necesario tomar en cuenta las siguientes hipótesis: el puente peatonal tiene su masa y sección transversal constantes en toda su longitud; la masa de los peatones es pequeña en comparación con la masa del puente peatonal, esto significa que solo son representativos los efectos gravitacionales de la carga peatonal; los peatones se mueven a una velocidad constante desde el extremo izquierdo del puente hacia el extremo derecho del puente; el amortiguamiento del puente peatonal es proporcional a la velocidad de su vibración; y el puente peatonal está en reposo antes de que la carga peatonal cruce sobre este, de tal manera que no posee deflexión ni velocidad antes de la llegada de la carga peatonal. Todas estas hipótesis suelen cumplirse en la mayoría de los puentes peatonales, razón por la cual pueden modelarse como una viga continua Euler-Bernoulli. Un puente peatonal simplemente apoyado con sección transversal constante y con un AMS sujeto a una carga peatonal vertical móvil, puede modelarse como se muestra en la Figura 4.

En la Figura 4:

- \bar{m} = masa por unidad de longitud de la viga
- E = módulo de elasticidad de la viga
- I = segundo momento de área de la sección transversal de la viga alrededor del eje z
- ξ = fracción de amortiguamiento crítico del puente peatonal
- t = tiempo
- V_0 = velocidad constante a la que se desplaza la carga peatonal
- $F_V(t)$ = fuerza dinámica peatonal mostrada en la ecuación (1)
- l = el apoyo izquierdo del puente peatonal
- r = apoyo derecho del puente peatonal

- m_d = masa del AMS
- k_d = rigidez del AMS
- x_d = distancia existente entre el apoyo izquierdo del puente peatonal y el AMS
- L = longitud total del puente peatonal

Con base en el trabajo de Huergo (2016), la ecuación diferencial de movimiento asociada al modelo de la Figura 4 es:

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \bar{m} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + 2\bar{m}\xi w_i \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \delta(x - V_0 t) F_V(t) \tag{6}$$

Donde:

- $y(x,t)$ = desplazamiento dinámico vertical de la viga
- w_i = i -ésima frecuencia circular de vibración de la viga
- $\delta(x - V_0 t)$ = función de Dirac que representa matemáticamente cómo se mueve la carga peatonal vertical $F_V(t)$.

La solución elástica de la ecuación (6) se obtiene al aplicar el método de separación de variables, ver ecuación 7.

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi(x) q_i(t) \tag{7}$$

Donde:

$$q_i(t) = \frac{1}{w_i} \int_0^t \tilde{P}_i(\tau) e^{-\xi w_i(t-\tau)} \text{sen}[w_{i,d}(t-\tau)] d\tau \tag{8}$$

$$\tilde{P}_i(t) = \frac{\int_0^L [\delta(x - V_0 t) F_V(t)] \phi_i(x) dx}{m_d \phi_{AMS}^2 + \bar{m} \int_0^L \phi_i(x)^2 dx} = \frac{F_V(t) \phi_i(V_0 t)}{m_d \phi_{AMS}^2 + \bar{m} \int_0^L \phi_i(x)^2 dx} \tag{9}$$

$$w_{i,d} = w_i \sqrt{1 - \xi^2} \tag{10}$$

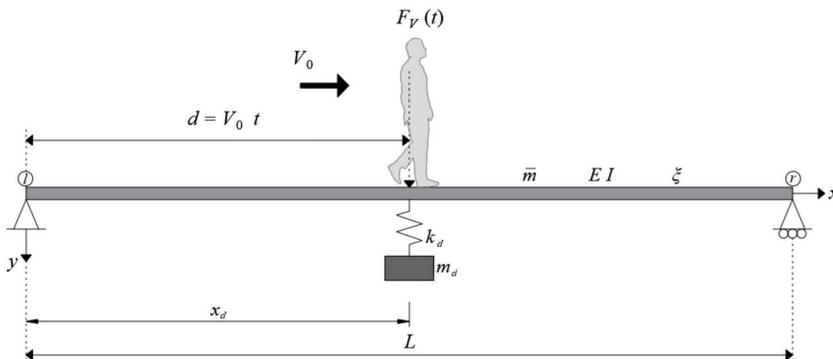


Figura 4. Viga continua Euler-Bernoulli simplemente apoyada con un AMS sujeta a una carga peatonal vertical móvil

Donde:

- $\phi_i(x)$ = amplitud modal del i -ésimo modo de vibración de la viga con un AMS
- ϕ_{AMS} = amplitud modal del AMS
- $q_i(t)$ = desplazamiento generalizado del i -ésimo modo de vibración de la viga con un AMS, el cual se obtiene al resolver la integral de Duhamel mostrada en la ecuación (8)
- $\tilde{P}_i(t)$ = carga generalizada del i -ésimo modo de vibración de la viga con un AMS
- $w_{i,d}$ = la i -ésima frecuencia circular amortiguada de la viga con un AMS
- τ = tiempo de duración de un impulso unitario

Wu y Chou (1999) propusieron una metodología para el cálculo de las frecuencias y modos de vibración de vigas continuas Euler-Bernoulli con múltiples amortiguadores de masa sintonizada y con diferentes condiciones de apoyo: viga simplemente apoyada, viga con doble empotramiento, viga empotrada en un extremo y con apoyo simple en el otro extremo, y viga en voladizo. El método propuesto por Wu y Chou (1999) plantea un sistema con $5n+4$ ecuaciones $[\bar{B}]\{\bar{C}\} = 0$ para una viga Euler-Bernoulli con n amortiguadores de masa sintonizada. Las soluciones de $[\bar{B}] = 0$ (donde $|\cdot|$ representa un determinante) permiten obtener las frecuencias de vibración de la viga y la sustitución de cada valor correspondiente en la función de eigenvalores permite obtener los modos de vibración asociados. La matriz $[\bar{B}]$ se ensambla mediante la técnica convencional de elemento finito, por lo que el sistema de ecuaciones de eigenvalores $[\bar{B}]\{\bar{C}\} = 0$ puede ser fácilmente obtenido. Wu y Chou (1999) determinaron que la matriz $[\bar{B}]$ y el vector $\{\bar{C}\}$ para una viga Euler-Bernoulli con un AMS (Figura 4) son:

$$[\bar{B}] = \begin{bmatrix} [B_i] & [0]_{2 \times 4} & [0]_{2 \times 1} \\ [B_a] & [B_b] & [B_c] \\ [0]_{2 \times 4} & [B_r] & [0]_{2 \times 1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\{\bar{C}\} = \{\bar{C}_1 \ \bar{C}_2 \ \bar{C}_3 \ \bar{C}_4 \ \bar{C}_5 \ \bar{C}_6 \ \bar{C}_7 \ \bar{C}_8 \ \phi_{AMS}\}^T \quad (12)$$

Tabla 7. Matrices $[B_i]$ y $[B_r]$ para diferentes condiciones de apoyo (Wu y Chou, 1999)

Condiciones de apoyo		$[B_i]$	$[B_r]$
$x = 0$	$x = L$		
Simple	Simple	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \text{sen}(\beta L) & \text{cos}(\beta L) & \text{senh}(\beta L) & \text{cosh}(\beta L) \\ -\text{sen}(\beta L) & -\text{cos}(\beta L) & \text{senh}(\beta L) & \text{cosh}(\beta L) \end{bmatrix}$
Empotrado	Empotrado	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \text{sen}(\beta L) & \text{cos}(\beta L) & \text{senh}(\beta L) & \text{cosh}(\beta L) \\ \text{cos}(\beta L) & -\text{sen}(\beta L) & \text{cosh}(\beta L) & \text{senh}(\beta L) \end{bmatrix}$
Empotrado	Simple	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \text{sen}(\beta L) & \text{cos}(\beta L) & \text{senh}(\beta L) & \text{cosh}(\beta L) \\ -\text{sen}(\beta L) & -\text{cos}(\beta L) & \text{senh}(\beta L) & \text{cosh}(\beta L) \end{bmatrix}$
Empotrado	Libre	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\text{sen}(\beta L) & -\text{cos}(\beta L) & \text{senh}(\beta L) & \text{cosh}(\beta L) \\ -\text{cos}(\beta L) & \text{sen}(\beta L) & \text{cosh}(\beta L) & \text{senh}(\beta L) \end{bmatrix}$

Donde:

$$[B_a] = \begin{bmatrix} \text{sen}(\beta x_d) & \text{cos}(\beta x_d) & \text{senh}(\beta x_d) & \text{cosh}(\beta x_d) \\ \text{cos}(\beta x_d) & -\text{sen}(\beta x_d) & \text{cosh}(\beta x_d) & \text{senh}(\beta x_d) \\ -\text{sen}(\beta x_d) & -\text{cos}(\beta x_d) & \text{senh}(\beta x_d) & \text{cosh}(\beta x_d) \\ -\text{cos}(\beta x_d) & \text{sen}(\beta x_d) & \text{cosh}(\beta x_d) & \text{senh}(\beta x_d) \\ \text{sen}(\beta x_d) & \text{cos}(\beta x_d) & \text{senh}(\beta x_d) & \text{cosh}(\beta x_d) \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$[B_b] = \begin{bmatrix} -\text{sen}(\beta x_d) & -\text{cos}(\beta x_d) & -\text{senh}(\beta x_d) & -\text{cosh}(\beta x_d) \\ -\text{cos}(\beta x_d) & \text{sen}(\beta x_d) & -\text{cosh}(\beta x_d) & -\text{senh}(\beta x_d) \\ \text{sen}(\beta x_d) & \text{cos}(\beta x_d) & -\text{senh}(\beta x_d) & -\text{cosh}(\beta x_d) \\ \text{cos}(\beta x_d) & -\text{sen}(\beta x_d) & -\text{cosh}(\beta x_d) & -\text{senh}(\beta x_d) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$[B_c] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\beta L m_d}{\bar{m} H} \\ \frac{E I m_d \beta^4}{\bar{m} k_d} - 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

y donde $[B_i]$ y $[B_r]$ son respectivamente las matrices de coeficientes para los apoyos izquierdo y derecho del puente peatonal. Las matrices $[B_i]$ y $[B_r]$ se muestran en la Tabla 7 para diferentes condiciones de apoyo.

Con base en la metodología de Wu y Chou (1999), el i -ésimo modo de vibración vertical de la viga con un AMS (Figura 4) está dado por:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \bar{C}_{1,i} \text{sen}(\beta_i x) + \bar{C}_{2,i} \text{cos}(\beta_i x) + \bar{C}_{3,i} \text{senh}(\beta_i x) + \bar{C}_{4,i} \text{cosh}(\beta_i x), & x \leq x_d \\ \bar{C}_{5,i} \text{sen}(\beta_i x) + \bar{C}_{6,i} \text{cos}(\beta_i x) + \bar{C}_{7,i} \text{senh}(\beta_i x) + \bar{C}_{8,i} \text{cosh}(\beta_i x), & x > x_d \end{cases} \quad (16)$$

La i -ésima frecuencia de vibración vertical en Hz del puente peatonal con un AMS está dada por:

$$f_i = \frac{B_i^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}} \quad (17)$$

Los parámetros óptimos del AMS se obtienen mediante la teoría desarrollada por Den Hartog (1956) por las ecuaciones:

$$f_d \frac{f_1^*}{1 + \mu} \tag{18}$$

$$\mu = \frac{m_d}{\tilde{m}_{1,e}} \tag{19}$$

$$\tilde{m}_{1,e} = \frac{\tilde{m} \int_0^L [\phi_1^*(x)]^2 dx}{[\phi_1^*(x_d)]^2} \tag{20}$$

$$k_d = m_d (2\pi f_d)^2 \tag{21}$$

$$c_d = 2 \xi_d m_d (2\pi f_d) \tag{22}$$

$$\xi_d = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)^3}} \tag{23}$$

$$\xi_e = \frac{m_d}{2\tilde{m}_{1,e}} \sqrt{1 + \left(\frac{2\xi \tilde{m}_{1,e}}{m_d} + \frac{1}{2\xi_d} \right)^2} \tag{24}$$

Donde:

f_d = frecuencia de vibración en Hz del AMS
 f_1^* = frecuencia fundamental vertical de vibración del puente peatonal sin AMS

m_d, k_d, c_d y ξ_d = respectivamente la masa, rigidez, coeficiente de amortiguamiento y fracción de amortiguamiento crítico del AMS

$\tilde{m}_{1,e}$ = masa modal efectiva del primer modo de vibración del puente peatonal sin AMS

ϕ_1^* = primer modo de vibración vertical del puente peatonal sin AMS

$\phi_1^*(x_d)$ = amplitud modal en el punto de anclaje del AMS del primer modo de vibración vertical del puente peatonal sin AMS

\tilde{m} = masa por unidad de longitud del puente peatonal

ξ_e = fracción de amortiguamiento crítico equivalente del puente peatonal con un AMS

El i -ésimo modo de vibrar del puente peatonal sin AMS está dado por:

$$\phi_i^*(x) = A_i \text{sen}(a_i / L x) + B_i \text{cos}(a_i / L x) + C_i \text{senh}(a_i / L x) + D_i \text{cosh}(a_i / L x) \tag{25}$$

donde A_i, B_i, C_i y D_i son las constantes de integración que conforman el vector característico, y donde a_i es el valor característico asociado a dicho vector característico. Las constantes de integración y el valor característico dependen de las condiciones de frontera de la viga y

Tabla 8. Constantes de integración para diferentes condiciones de frontera de una viga sin AMS (Huelgo, 2016)

Condiciones de apoyo		Constantes de integración			
$x=0$	$x=L$	A_i	B_i	C_i	D_i
Simple	Simple	1.0	0.0	$-\text{sen}(a_i) / \text{senh}(a_i)$	0.0
Empotrado	Empotrado	1.0	$\text{senh}(a_i) - \text{sen}(a_i) / \text{cos}(a_i) - \text{cosh}(a_i)$	-1.0	$-\text{senh}(a_i) - \text{sen}(a_i) / \text{cos}(a_i) - \text{cosh}(a_i)$
Empotrado	Simple	1.0	$\text{senh}(a_i) - \text{sen}(a_i) / \text{cos}(a_i) - \text{cosh}(a_i)$	-1.0	$-\text{senh}(a_i) - \text{sen}(a_i) / \text{cos}(a_i) - \text{cosh}(a_i)$
Empotrado	Libre	1.0	$-\text{cos}(a_i) + \text{cosh}(a_i) / \text{senh}(a_i) - \text{sen}(a_i)$	-1.0	$\text{cos}(a_i) - \text{cosh}(a_i) / \text{senh}(a_i) - \text{sen}(a_i)$

Tabla 9. Valores característicos para diferentes condiciones de frontera de una viga sin AMS (Gonçalves et al., 2007)

i	a_i							
	$x=0$	$x=L$	$x=0$	$x=L$	$x=0$	$x=L$	$x=0$	$x=L$
	Apoyo simple	Apoyo simple	Apoyo empotrado	Apoyo empotrado	Apoyo empotrado	Apoyo simple	Apoyo empotrado	Apoyo libre
1		π		4.73004		3.92660		1.87510
2		2π		7.85320		7.06858		4.69409
3		3π		10.9956		10.2102		7.85476
4		4π		14.1372		13.3518		10.9955
5		5π		17.2788		16.4934		14.1372
6, 7, ..., ∞		$i\pi$		$(2i + 1)\pi / 2$		$(4i + 1)\pi / 2$		$(2i - 1)\pi / 2$

pueden obtenerse mediante las Tablas 8 y 9, respectivamente.

La *i*-ésima frecuencia vertical en Hz del puente peatonal sin AMS está dada por:

$$f_i^* = \frac{a_i^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}} \quad (26)$$

Para garantizar una solución aceptable en la ecuación (6) se debe de considerar un número de modos de vibración suficiente para garantizar que por lo menos participa 9 % de la masa en la respuesta dinámica. La masa modal efectiva del *i*-ésimo modo de vibrar del puente peatonal con un AMS está dada por:

$$m_{eff,i} = \frac{[m_d \phi_{AMS} + \bar{m} \int_0^L \phi_i(x) dx]^2}{m_d \phi_{AMS}^2 + \bar{m} \int_0^L \phi_i(x)^2 dx} \quad (27)$$

RESULTADOS

Se estudiaron tres puentes peatonales denominados en este trabajo como puente 1, 2 y 3 (Figura 5); esto con el objetivo de aplicar la metodología desarrollada en este trabajo y diseñar un sistema de control pasivo que logre mitigar las vibraciones verticales inducidas por peatones en cada uno de los puentes. Los detalles de la estructuración, ubicación y modelo matemático de los puentes peatonales en estudio se pueden revisar en el trabajo de Huergo (2016).

El puente peatonal 1 tiene un solo claro de 24 m y posee dos apoyos simples. El puente peatonal 2 tiene dos claros de 24 m, dos apoyos extremos empotrados y un apoyo central (arco) tipo simple; lo que permite estudiar cada claro de manera separada. El puente peato-

nal 3 tiene un solo claro de 36 m y posee dos apoyos empotrados. Las propiedades mecánicas de los 3 puentes peatonales se muestran en la Tabla 10.

Se realizaron modelos numéricos en un software comercial y pruebas de vibración ambiental de los puentes peatonales para determinar sus propiedades dinámicas (Huergo, 2016). El amortiguamiento respecto al crítico resultó ser de 0.8 %, 0.37 % y 0.45 % para el puente peatonal 1, 2 y 3, respectivamente (Huergo, 2016). Se determinaron las frecuencias verticales de vibración de los puentes peatonales con la teoría descrita en la sección anterior, observándose que con siete modos de vibración se lograba una participación de la masa en la respuesta dinámica mayor a 90 %. Las propiedades dinámicas verticales obtenidas se muestran en la Tabla 11.

La Tabla 11 muestra que el primer modo de vibración de los puentes peatonales 1 y 2 puede vibrar en resonancia ante una carrera peatonal rápida; mientras que el primer modo de vibración del puente peatonal 3 puede vibrar en resonancia ante una carrera normal. Los AMS deben estar sintonizados con el primer modo de vibración de los puentes peatonales y deben colocarse en el punto de máxima amplitud modal del primer modo de vibración de cada puente peatonal. Para un diseño previo del AMS, el valor de μ suele estar entre 0.02 y 0.07 (Bachmann *et al.*, 1995); por lo que se evaluó la respuesta dinámica para varias propuestas de AMS, cuyos parámetros óptimos se obtuvieron mediante las ecuaciones (18) a (24). Las frecuencias verticales de vibración en Hz de los puentes peatonales con un AMS se muestran en la Tabla 12 si se consideran los parámetros óptimos; donde el punto de anclaje del AMS es igual a $L/2$ para el puente peatonal 1 y 3, e igual a $0.586 L$ para el puente peatonal 2.

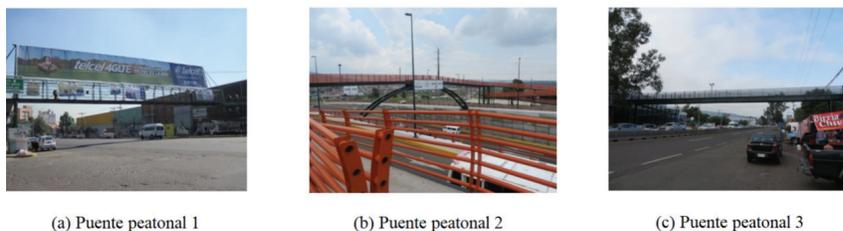


Figura 5. Puentes peatonales estudiados en este trabajo

Tabla 10. Propiedades mecánicas de los puentes peatonales estudiados

Propiedad mecánica	Puente peatonal 1	Puente peatonal 2	Puente peatonal 3
<i>L</i> (m)	30	24	36
\bar{m} (kg/m)	772.79	658.73	1,016.93
<i>E I</i> (N m ²)	3,379,830,806	367,029,898	1,032,132,941

Tabla 11. Modos y frecuencias de vibración verticales de los puentes peatonales sin AMS

<i>i</i> -ésimo modo de vibrar	Puente peatonal 1			Puente peatonal 2			Puente peatonal 3		
	f_i (Hz)	$m_{eff,i}$ (%)	$\sum_{i=1} m_{eff,i}$ (%)	f_i (Hz)	$m_{eff,i}$ (%)	$\sum_{i=1} m_{eff,i}$ (%)	f_i (Hz)	$m_{eff,i}$ (%)	$\sum_{i=1} m_{eff,i}$ (%)
1	3.65	81.0564	81.0564	3.18	73.9601	73.9601	2.768	69.0331	69.0331
2	14.6	1.974×10^{-9}	81.0564	10.3052	0.6828	74.6429	7.6301	9.5×10^{-14}	69.0331
3	32.85	9.0058	90.0622	21.5012	11.1815	85.8244	14.9580	13.2328	82.2659
4	58.4	7.895×10^{-9}	90.0622	36.7683	0.1925	86.0169	24.7265	9.89×10^{-13}	82.2659
5	91.25	3.2417	93.3039	56.1066	4.2851	90.3020	36.9372	5.3591	87.625
6	131.4	0.00017562	93.3041	79.5158	0.0890	90.3910	51.5897	4.27×10^{-12}	87.625
7	178.85	1.6024	94.9065	106.9965	2.2469	92.6379	68.6845	2.8820	90.507

Tabla 12. Frecuencias de vibración verticales de los puentes peatonales con un AMS

Puente peatonal	$\frac{m_d}{\bar{m}L}$	μ	f_d (Hz)	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)	f_3 (Hz)	f_4 (Hz)	f_5 (Hz)	f_6 (Hz)	f_7 (Hz)
1	0.005	0.01	3.6139	3.4547	3.8179	14.6	32.852	58.4	(Hz)	(Hz)
	0.01	0.02	3.5784	3.3671	3.8782	14.6	32.854	58.4	91.251	131.4
	0.025	0.05	3.4762	3.1856	3.9821	14.6	32.859	58.4	91.253	131.4
	0.05	0.1	3.3182	2.9720	4.0726	14.6	32.867	58.4	91.256	131.4
	0.1	0.2	3.0417	2.6677	4.1576	14.6	32.878	58.4	91.26	131.4
2	0.0044	0.01	3.1423	3.0066	3.3231	10.306	21.502	36.769	56.106	79.516
	0.0088	0.02	3.1115	2.9304	3.3757	10.306	21.504	36.769	56.107	79.517
	0.022	0.05	3.0226	2.7718	3.4657	10.306	21.508	36.771	56.107	79.518
	0.044	0.1	2.8852	2.5859	3.5445	10.307	21.515	36.773	56.108	79.52
	0.088	0.2	2.6449	2.3204	3.6184	10.308	21.524	36.776	56.109	79.523
3	0.004	0.01	2.7351	2.617	2.8925	7.6301	14.96	24.726	36.938	51.59
	0.008	0.02	2.7083	2.5506	2.9382	7.6301	14.962	24.726	36.939	51.59
	0.02	0.05	2.6309	2.4124	3.0164	7.6301	14.967	24.726	36.941	51.59
	0.04	0.1	2.5114	2.2502	3.0848	7.6301	14.975	24.726	36.944	51.59
	0.08	0.2	2.3021	2.0188	3.1489	7.6301	14.987	24.726	36.948	51.59

Los modos de vibración verticales de los puentes peatonales con $\mu = 0$ (sin AMS) y con $\mu = 0.05$ se muestran en las Figuras 6, 7 y 8 para los puentes peatonales 1, 2 y 3, respectivamente.

Los tres puentes peatonales estudiados se encuentran ubicados en una zona que es posible que los peatones pasen corriendo, por lo que estos fueron evaluados para cuatro casos de carga peatonal: uno, dos, cuatro y ocho peatones en grupo, los cuales corren en resonancia con la frecuencia fundamental vertical de los puentes peatonales. Las respuestas dinámicas máximas de aceleraciones de los tres puentes peatonales ante 1 peatón y 8 peatones se muestra en las Figuras 9, 10 y 11, respectivamente; donde $\mu = 0$ representa el caso sin AMS.

Se eligió el AMS de menor masa que logrará satisfacer el estado límite de confort para los cuatro casos de carga de los tres puentes peatonales. Los parámetros de diseño de los AMS se muestran en la Tabla 13, donde x_d es el punto de colocación del AMS.

Los AMS asociados a la Tabla 13 se muestran en las Figuras 12, 13 y 14, respectivamente; considerando que las masas están hechas de placas de acero con una densidad de $7,850 \text{ kg/m}^3$.

El diseño del AMS del puente peatonal 1 (Figura 12) es diferente al utilizado en los puentes peatonales 2 y 3 (Figuras 13 y 14), esto debido a su diferente estructuración. Los AMS de las Figuras 13 y 14 se deben colocar en ambas vigas longitudinales de los puentes peatonales.

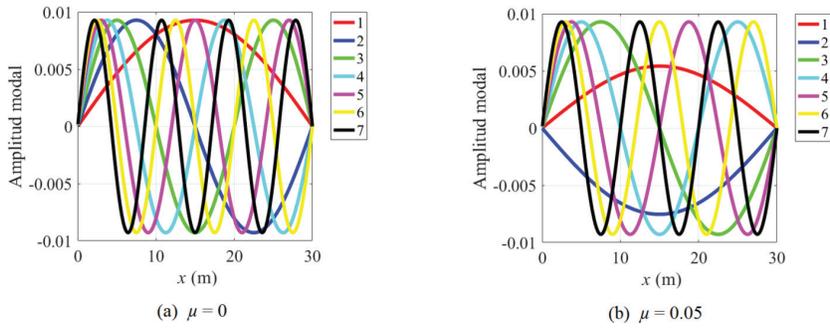


Figura 6. Formas modales verticales del puente peatonal 1

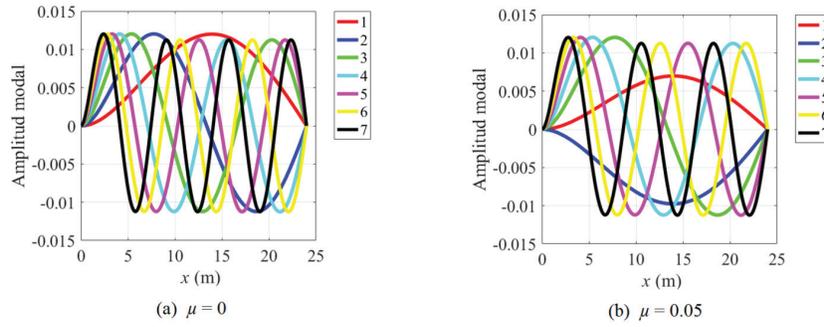


Figura 7. Formas modales verticales del puente peatonal 2

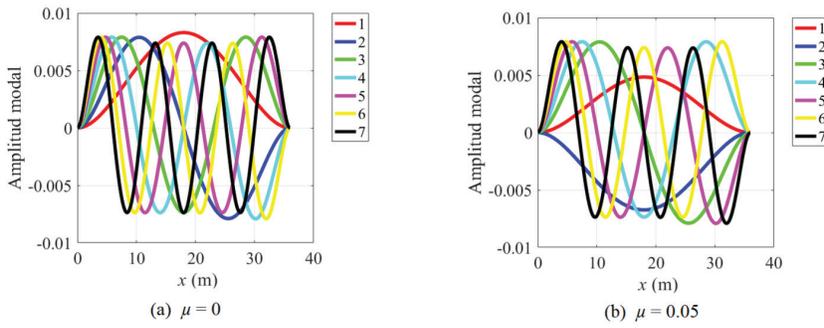


Figura 8. Formas modales verticales del puente peatonal 3

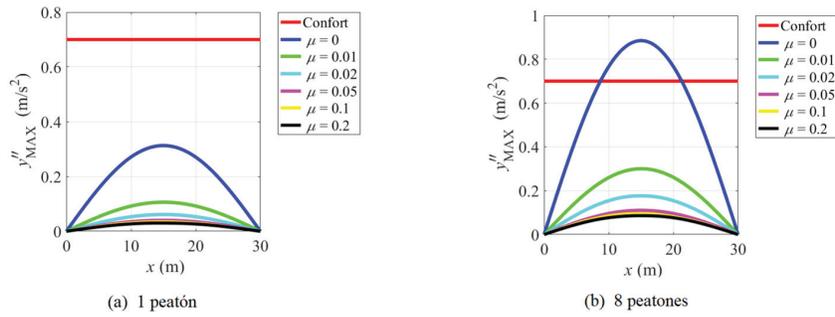


Figura 9. Aceleraciones máximas del puente peatonal 1

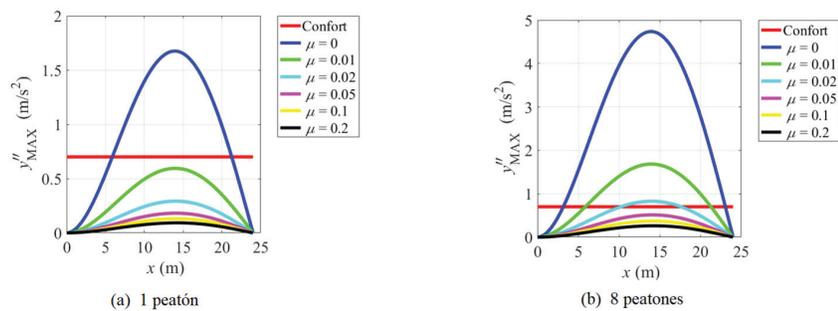


Figura 10. Aceleraciones máximas del puente peatonal 2

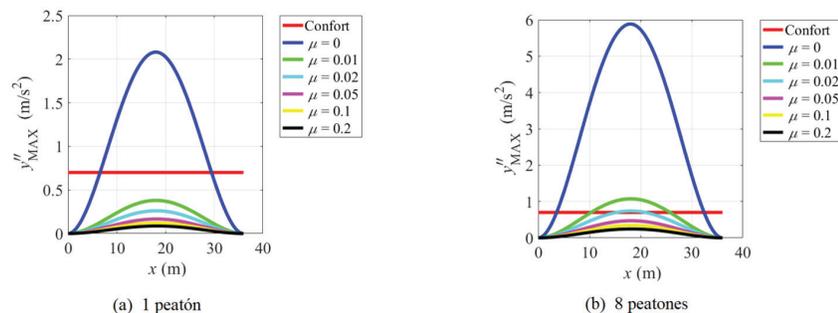


Figura 11. Aceleraciones máximas del puente peatonal 3

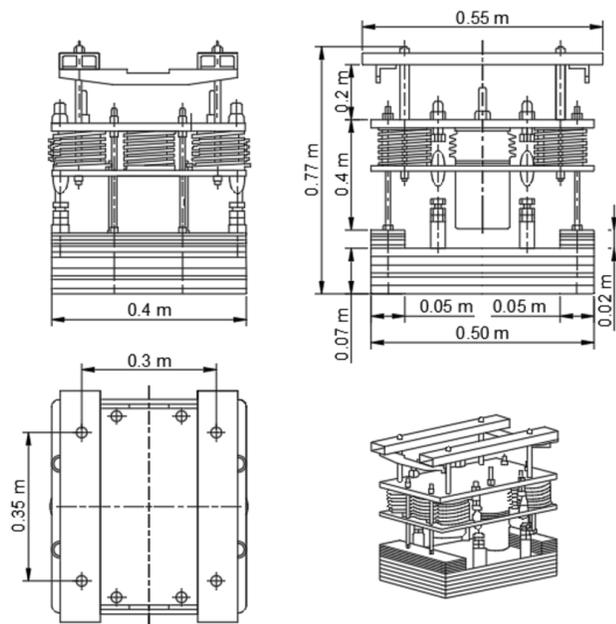


Figura 12. Diseño final del AMS del puente peatonal 1

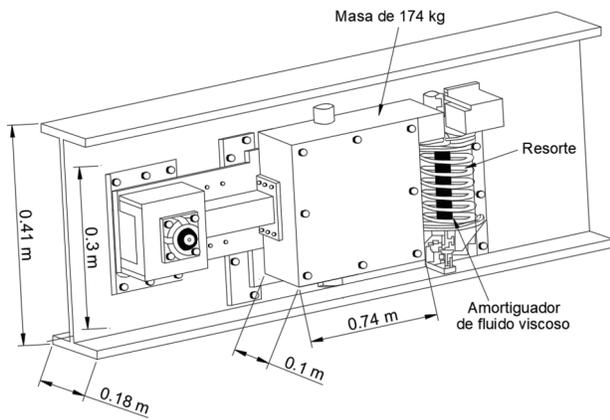


Figura 13. Diseño final del AMS del puente peatonal 2

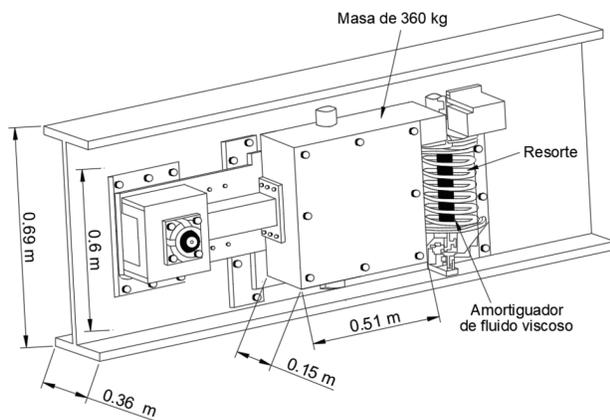


Figura 14. Diseño final del AMS del puente peatonal 3

Tabla 13. Diseño final de los AMS de los puentes peatonales

Puente peatonal	$m_d / \bar{m} L$	μ	f_d (Hz)	m_d (kg)	k_d (N/m)	c_d (Ns/m)	x_d (m)
1	0.005	0.01	3.6139	115.9192	59,766.5352	317.5926	15
2	0.022	0.05	3.0226	347.0425	125,170.2394	1,677.3451	14.064
3	0.02	0.05	2.6309	725.7459	198,320.5526	3,053.6751	18

les 2 y 3, respectivamente; esa es la razón por la cual las masas, resortes y amortiguadores de los AMS de las Figuras 13 y 14 son de aproximadamente la mitad de los valores presentados en la Tabla 13.

CONCLUSIONES

Debido al crecimiento de las ciudades, la infraestructura vial también tiende a crecer, teniéndose avenidas vehiculares con mayor tránsito y en ocasiones con mayor número de carriles, lo que genera que los usuarios utilicen puentes peatonales con un claro más largo y por tanto más flexibles. En México, actualmente no existe

una normativa de diseño para este tipo de estructuras, por lo general se diseñan para satisfacer las condiciones estéticas-arquitectónicas de la urbe; o se diseñan estructuras tipo, es decir, diseños generales que se colocan en cualquier sitio sin importar las condiciones de uso locales. Uno de los problemas que presentan la mayoría de los puentes peatonales son las condiciones de servicio por confort que subjetivamente le inducen cierta seguridad al usuario. En este trabajo se establece el procedimiento numérico para el análisis dinámico de puentes peatonales considerándolos como vigas continuas con diferentes condiciones de apoyo y sometidas a una carga peatonal vertical móvil. Se diseñaron los dispositi-

vos conocidos como amortiguadores de masa sintonizada, los cuales permiten sintonizar o acoplar sus frecuencias con la frecuencia vertical del puente, la cual se considera como desfavorable. El objetivo es modificar su respuesta dinámica tal que sean satisfechas las limitaciones de diseño. Dicha metodología se aplicó a tres puentes peatonales con características estructurales comunes en México, diseñándose los dispositivos de control pasivo que permitan satisfacer el estado límite de servicio.

AGRADECIMIENTOS

El primer autor agradece al CONACyT, quién proporcionó los medios económicos por medio de la beca para la realización de estudios de maestría en Estructuras en la Universidad Nacional Autónoma de México. De igual manera, se agradece a la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, quién por medio de la Coordinación de la Investigación Científica y de la Facultad de Ingeniería Civil, proporcionaron las facilidades para la realización de este proyecto.

REFERENCIAS

Bachmann H., Ammann W., Deischl F., Eisenmann J., Floegl I. & Hirsch G. *et al.* (1995). *Vibration Problems in Structures: Practical Guidelines*. Birkhäuser, Berlín.

British Standard, UK N.A. EN 1991-2. (2002). Steel, concrete and composite bridges. University of Sheffield, England.

Den-Hartog J.P. (1956). *Mechanical Vibrations* (4th ed.). Nueva York: McGraw-Hill.

Gonçalves P.J.P., Brennan M.J. & Elliott, S.J. (2007). Numerical evaluation of high-order modes of vibration in uniform Euler-Bernoulli beams. *Journal of Sound and Vibration*, 301, 1035-1039. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.10.012>

HIVOSS. (2008). Human Induced Vibrations of Steel Structures: Design of footbridges. Research Fund for Coal and Steel.

Huergo I.F. (2016). *Control de vibraciones verticales en puentes peatonales mediante amortiguadores de masa sintonizados*. Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México.

International Standardization Organization 10137. (2007). Bases for design of structures-Serviceability of buildings and walkways against vibrations.

NTC. (2017). Normas técnicas complementarias de diseño por sismo. *Gaceta Oficial. Ciudad de México*.

Sétra. (2006). Evaluation du comportement vibratoire des passerelles piétonnes sous l'action des piétons, Association Française de Génie Civil. Sétra/AFGC.

Wheeler J. (1982). Prediction and control of pedestrian induced vibration in footbridges. *ASCE Journal of the Structural Division*, 108 (ST9), 2045-2065.

Wu J. S. & Chou H.M. (1999). A new approach for determining the natural frequencies and mode shapes of a uniform beam carrying any number of sprung masses. *Journal of Sound and Vibration*, 220 (3), 451-468. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1998.1958>