



## Prototipo de taza hexagonal para un mejor almacenaje espacial sin desperdicio de área perimetral

### Hexagonal cup prototype for better space storage without waste of perimeter area

---

Paredes-Paramo Liliana

Instituto Politécnico Nacional

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Sección de Estudios de Posgrado e Investigación

Correo: [lilusparedes@gmail.com](mailto:lilusparedes@gmail.com)

<https://orcid.org/0000-0001-6345-549X>

Martínez-Cruz Miguel Ángel

Instituto Politécnico Nacional

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Sección de Estudios de Posgrado e Investigación

Correo: [mamartinezc@hotmail.com](mailto:mamartinezc@hotmail.com)

<https://orcid.org/0000-0002-4431-9262>

Trejo-Martínez Alfredo

Tecnológico de Estudios Superiores del Oriente del Estado de México

Área de Estudios de Posgrado e Investigación

Correo: [posgradotesoem@gmail.com](mailto:posgradotesoem@gmail.com)

<https://orcid.org/0000-0001-6555-2285>

Chávez-Pichardo Mauricio

Tecnológico de Estudios Superiores del Oriente del Estado de México

Área de Estudios de Posgrado e Investigación

Correo: [carl9611@hotmail.com](mailto:carl9611@hotmail.com)

<https://orcid.org/0000-0002-3378-0440>

Arenas-Resendiz Tanya

Universidad Nacional Autónoma de México

Centro de Ciencias de la Complejidad (C3)

Correo: [tanya.arenas@c3.unam.mx](mailto:tanya.arenas@c3.unam.mx)

<https://orcid.org/0000-0003-0385-0791>

#### Resumen

La taza es uno de los artefactos más antiguos y que menos cambios ha presentado a través del tiempo, sin embargo, el diseño tradicional presenta dos limitantes: la incapacidad de almacenaje espacial y el desperdicio de área perimetral. En este trabajo se propone el desarrollo de un prototipo de taza basado en la descomposición del plano Euclidiano, específicamente en la utilización del hexágono como figura principal. La disminución del desperdicio perimetral se ha logrado modificando el asa lateral externa de forma tal que quede contenida en una de las caras laterales del hexágono, permitiendo una mejor utilización del espacio cúbico en lugares reducidos de almacenamiento; para lograr un estibaje vertical en varios niveles se incorporó una base circular que facilita la interconectividad de las piezas al momento de su estibación. Por otra parte, la forma ergonómica y estética del nuevo diseño facilita su sujeción durante su uso y manipulación. La descripción de las partes que integran el diseño, así como su justificación, se tratan a continuación.

**Descriptor:** Diseño, teorema perimetral, plano Euclidiano, taza, hexagonal.

#### Abstract

The cup is one of the oldest artifacts that has presented the least changes over time, however, the traditional design has two limitations: the inability to store space and the waste of perimeter area. In this work we propose the development of a cup prototype based on the decomposition of the Euclidean plane, specifically on the use of the hexagon as the main figure. The reduction of perimeter waste has been achieved by modifying the external side handle in such a way that it is contained in one of the lateral faces of the hexagon, allowing a better use of the cubic space in reduced storage places. To achieve vertical stowage at several levels, a circular base was incorporated that facilitates the interconnectivity of the pieces at the time of their stowage. On the other hand, the ergonomic and aesthetic shape of the new design facilitates its grip during use and handling. The description of the parts that make up the design, as well as their justification, are discussed below.

**Keywords:** Design, perimeter theorem, Euclidean plane, bowl, hexagonal.

## INTRODUCCIÓN

Según la ONU, durante la última década, la población mundial ha aumentado de forma acelerada, alcanzando los 7.7 millones de personas en 2019 (United Nations Department of Public Information, 2019). El aumento poblacional y la oferta cada vez menor de espacios en zonas metropolitanas ha generado una fuerte tendencia de adquirir casas-habitación de pequeñas proporciones (INEGI, 2015) en áreas conurbadas. A pesar de ello, según datos de la Cámara Nacional de la Industria de Desarrollo y Promoción de Vivienda, se tiene un déficit de 9 millones de viviendas para las casi 650 mil familias que buscan hogar anualmente (CANADEVI, 2018). Ante esta situación, el gobierno Federal en conjunto con el estatal, han incluido en los planes de desarrollo social a la generación de viviendas de bajo costo y fácil adquisición, pero con un área mínimo de construcción que promedie los 45 mts<sup>2</sup> (INEGI, 2015).

De acuerdo con la Organización Mundial de la Salud, las casas de interés social que actualmente se ofertan, deben disponer de los siguientes elementos: “Artefactos, muebles y equipamiento necesario para el desarrollo de actitudes y hábitos sostenibles, así como de elementos seguros, sin riesgos de deslizamientos o caídas” (Hacia una vivienda saludable, 2018); por desgracia, la premisa anterior presenta serias dificultades en su implementación, al enfrentarse a la distribución espacial de lugares pequeños y poco funcionales para familias de más de tres integrantes.

En México, el promedio de habitantes por vivienda es de 3.7 personas (INEGI, 2015), con un ritmo de vida actual que incluye el uso y almacenamiento de elementos tales como: vestido, libros, juguetes, artículos de cocina, etcétera; cuya geometría complica su almacenamiento y resguardo, además de que en algunos casos es desproporcional al espacio disponible. Esta tendencia ha provocado que el sector mobiliario desarrolle elementos de dimensiones acordes a espacios reducidos y elementos multifuncionales que proporcionen una o dos funciones más, aparte de la propia. Estos elementos de carácter funcional han sido combinados con detalles ornamentales que permiten la integración entre el uso y la estética.

Una de las áreas en las que se encuentran más innovaciones y elementos de origen multifuncional es la cocina. La disminución de espacio en las viviendas ha generado la minimización de esta área, potenciando el uso de productos que permitan tener todos los elementos necesarios al alcance de la mano (Escamilla, 2019).

De todos los elementos multifuncionales que podemos encontrar en la cocina, la taza es, quizá, el más re-

presentativo de ellos. Desde sus orígenes, este elemento no solo ha servido para tomar líquidos o como elemento ornamental, sino también, ha sido símbolo de bienestar e incluso de lujo (Davenport, 2002).

La taza es uno de los artefactos más antiguos y que menos cambios ha tenido a lo largo de los siglos (Historia y arqueología, 2016). Se han descubierto hallazgos arqueológicos en los que se denota el uso de este elemento en material tan rudimentario como el hueso de diversos animales o humanos (Whelan, 2019). A medida que la tecnología fue avanzando, se modificaron los materiales y la calidad de los mismos para su elaboración (Pellini, 2015), pero el diseño continúa siendo esencialmente el mismo. El diseño tradicional ha sido adecuado por siglos, pero tiene dos limitantes; el primero es que no se puede estibar más de dos unidades sin riesgo de caídas y el segundo es el desperdicio perimetral que ocasiona el asa y que no permite la utilización óptima del Plano Euclidiano.

Este trabajo se enfoca en la propuesta de un nuevo diseño que elimine las limitantes antes mencionadas. Para una mejor comprensión del proceso realizado, en la siguiente sección se procederá a describir de forma breve, los motivos que nos llevaron a la realización de un diseño de taza de topología hexagonal. Posteriormente, se explica cada uno de los detalles del diseño de la taza, incluyendo los dibujos pertinentes que muestran las características del producto concluido; finalmente, se expondrán el análisis y la discusión de los resultados obtenidos.

## ANTECEDENTES

### CONSTRUCCIÓN DE VIVIENDA EN MÉXICO

Durante los últimos años y como consecuencia del aumento poblacional, se observan tres tendencias:

1. El desarrollo de espacios muy reducidos en las casas-habitación (Di Leva, 2019).
2. Aumento en el número de viviendas de 9.8 millones (1970) a 28.1 millones (2010) (INEGI, 2015).
3. Construcción de unidades habitacionales en zonas conurbadas.

Lo anterior ha ocasionado que durante los tres últimos sexenios se haya modificado el marco regulatorio de construcción de la vivienda (Normatividad en materia de vivienda, 2017) y como consecuencia de esto, las viviendas de interés social que se ofertan en la actualidad sean terrenos de cinco metros de frente por quince de fondo (75 mts<sup>2</sup>) con viviendas de 40 mts<sup>2</sup> o hasta de 34

mts<sup>2</sup> de construcción (Figura 1), consistentes de minúsculos espacios de sala-comedor-cocina, dos recámaras y un baño (Comisión Nacional de Vivienda, 2017).



Figura 1. Plano de casa Infonavit (Venta de casas en Pachuca, 2020)

#### VIVIENDA SALUDABLE

Otro punto importante que se debe considerar son las repercusiones psicológicas y mentales de las personas que habitan en casas de pequeñas proporciones. El habitar espacios reducidos genera efectos nocivos para la salud, constituyendo además, un factor que fomenta el surgimiento de entornos domésticos nocivos caracterizados por la agresividad y el estrés. Pero ¿Qué se puede hacer cuando ya se tiene una casa de pequeñas proporciones? (González, 2010). La decoración de la casa y el mobiliario utilizado pueden generar un estado de confort y bienestar, el sector mobiliario es el que más ha intervenido de manera constante en este aspecto, diseñando y desarrollando mobiliario que se adapta a determinadas condiciones espaciales, además de tener la capacidad de ajustarse en tamaño, forma y de manera práctica a las necesidades del usuario final. Según un artículo del economista (Gutierrez, 2014), la moda cada vez más creciente de adquirir artículos inteligentes, está dirigida a elementos multifuncionales (artículos con más de una función aparte de la propia); cuyo propósito es ayudar a organizar el espacio, pero cumpliendo con la premisa de “ser elegantes a la vista”. Los elementos multifuncionales han resuelto de manera práctica los problemas de espacio, al facilitar el desarrollo de hábitos sustentables con base en el uso de artefactos, muebles y equipamientos específicos para las necesidades de espacio reducido.

#### LA TAZA COMO ELEMENTO MULTIFUNCIONAL

Uno de los elementos más utilizados de forma cotidiana y con más problemas de espacio, pese a su multifuncionalidad y tamaño, es la taza; la cual es un recipiente que consta de una sola asa, usada para tomar líquidos; pero también, como contenedor, portalápices, elemento decorativo, etcétera. Ésta puede ser elaborada con materiales tan diversos como huesos de animales o de humanos y hasta cerámicas, sin olvidar las porcelanas y el borosilicato (Dunkin Coffee, 2013); pero todas ellas tienen como característica común el asa que facilita su manejo (Figura 2) y cuyo objetivo principal es el de evitar quemaduras de manos por líquidos calientes, pero que de forma casi inherente, minimiza el aprovechamiento del espacio.



Figura 2. Tazas (Antiguo Perú, 2015; Treasures of the Museums in Athens, 2020)

#### SITUACIÓN DEL PROBLEMA

El diseño tradicional de una taza presenta dos problemas:

1. El diseño circular y el asa lateral externa limitan la utilización de la superficie en la cual se resguarda la taza, desperdiciando el área perimetral y evitando que se pueda aprovechar para guardar otros objetos (Figura 3).

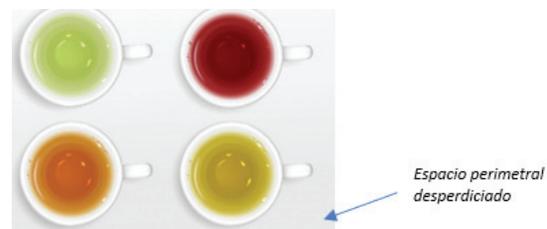


Figura 3. Vista superior de tazas (Shutterstock, 2020)

Su estibación de forma vertical en superficies planas (Figura 4) resulta inestable y sensible al movimiento, originando con ello caídas de forma continua.



Figura 4. Tazas encimadas (My introduction, 2019)

### DESARROLLO

El primer problema que se abordará es el diseño circular. Se observa que, dado que ese polígono no cubre en su totalidad la superficie del Plano Euclidiano (Figura 3), este debe cambiarse por otro que permita una mejor utilización de la superficie.

La utilización del plano no es un tema nuevo, pues desde el año 300 AC (Camargo, 2012) se tienen vestigios de matemáticos que buscaban la forma más adecuada para rellenar el plano. Una de las expresiones artísticas más representativas de esta tendencia (cubrir completamente un plano), son los Teselados, cuyas raíces se remontan a Arquímedes en el siglo III A.C (Apuntes-Revista digital de arquitectura, 2017) y cuya aplicación artística más representativa se encuentra en el palacio de la Alhambra, en Granada y en las calzadas y frescos romanos.

Como se observa en la Figura 5 los teselados utilizan polígonos regulares de tal forma que el espacio disponible sea cubierto en su totalidad, sin dejar huecos o espacios desperdiciados. Si tomamos esta información como punto de partida para el diseño presentado, encontramos que, si queremos aprovechar la mayor cantidad de espacio disponible, de tal forma que no desperdiciemos ni un  $cm^2$ , debemos de “teselar” los espacios disponibles de almacenamiento. Para ello realizaremos un análisis matemático del Plano Euclidiano que nos permita encontrar el o los polígonos regulares más adecuados para nuestro propósito.



Figura 5. La nadadora negra y el delfín (Euclides, 2020)

### DESCOMPOSICIÓN DEL PLANO EUCLIDIANO

Si descomponemos el Plano Euclidiano en polígonos regulares (todos sus lados y ángulos iguales), cada polígono tiene  $n$  vértices y, en cada vértice se intersectan  $k$  polígonos.

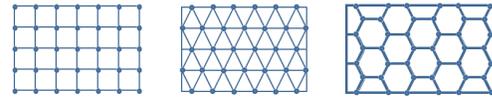


Figura 6. Complejos celulares (Trejo, 2007)

Como se observa en la Figura 6, cada polígono cuadrado tiene  $n = 4$  vértices y en cada vértice se intersectan  $K = 4$  polígonos, lo cual se denotará como  $(n,k) = (4,4)$ . De manera análoga, tenemos que, para los polígonos triangulares y hexagonales,  $(n,k) = (3,6)$  y  $(n,k) = (6,3)$ , respectivamente (las únicas soluciones para la pareja  $(n,k)$ , que permiten la descomposición del Plano Euclidiano en polígonos convexos regulares son:  $(4,4)$ ,  $(3,6)$  y  $(6,3)$ ).

Sea  $D$  una descomposición del Plano Euclidiano en polígonos convexos regulares. Entonces, cada polígono  $P_n \in D$  tiene  $n$  vértices y  $n$  cantos, y en cada uno de sus vértices,  $k$  polígonos de  $D$  se intersectan.

Observemos que:

1.  $k \in \{1,2\}$  es imposible, así que  $k \geq 3$
2.  $n \geq 3$

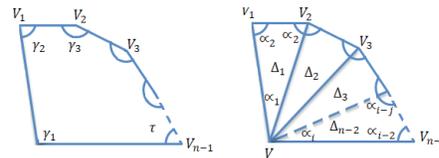


Figura 7. Vértices (Trejo, 2007)

Dentro de  $P_n$  conectando un vértice  $v_0 = v$  con cada uno de los otros vértices  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$  generamos  $(n - 2)$  triángulos denotados como  $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ , vea la Figura 7. Denotamos por  $\gamma_i$  el ángulo interior en el vértice  $v_{i-1}$  en el polígono  $P_n$  y por  $\alpha_j, \alpha_{j+1}, \alpha_{j+2}, \dots$  los ángulos interiores del triángulo  $\Delta_Q$ , con  $j = 3(Q - 1) + 1$ , para  $Q = 1, \dots, n - 2$ , vea Figura 7. Por la regularidad de  $P_n$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_n$ ,

dado que  $\sum_{i=1}^{3(n-2)} \alpha_i = \sum_{j=1}^n \gamma_j$ , se tiene que  $(n - 2) * 180^\circ = n * \gamma_i$  debido a que cada  $\Delta_k$  es un triángulo. Esto implica

$$\gamma_1 = \left[ \frac{n-2}{n} \right] * 180^\circ, \text{ de donde se obtiene que}$$

$$k * \gamma_1 = k * \left[ \frac{n-2}{n} \right] * 180^\circ = 360^\circ. \text{ En consecuencia,}$$

$$k * [(n - 2) / n] = 2, \text{ o sea } k = 2n / (n - 2).$$

Si  $n > 6$ , entonces se tiene que  $k = [2n / (n - 2)] < 3$ , lo que contradice el hecho de que  $k \geq 3$ . Por lo tanto, las únicas soluciones para la pareja  $(n, k)$  son las siguientes:  $(n, k) \in \{(4, 4), (3, 6), (6, 3)\}$ , las cuales corresponden al cuadrado, triángulo equilátero y hexágono, respectivamente. Ahora, la pregunta por contestar sería: ¿Cuál de estas posibilidades permite maximizar el área, de tal forma que pueda contener la mayor cantidad de líquido?

ISOPERIMETRÍA DE POLÍGONOS REGULARES

En matemáticas, la Isoperimetría es el estudio general de las figuras geométricas que tienen contornos iguales. En el libro V de su “colección Matemática” (El legado de las Matemáticas: de Euclides a Newton, 2000), Pappus de Alejandría establece que:

**Teorema.** *Entre dos polígonos regulares con el mismo perímetro, el que tiene mayor área es el que posee más ángulos.*

Se busca optimizar la utilización del plano al mismo tiempo que se maximice la cantidad de líquido contenido en el recipiente, de tal forma que el cumplimiento de una condición no menoscabe el cumplimiento de la otra, se procede a demostrar que entre los tres polígonos regulares que pueden teselar al Plano Euclidiano (Figura 8), el hexágono es el más adecuado.



Figura 8. Polígonos regulares

Antes que cualquier otra cosa, considérese el siguiente hecho:

$$\sin \alpha < \alpha \quad \forall \alpha > 0$$

Es claro que la desigualdad anterior es válida para todo  $\alpha > 1$ , dado que  $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; mientras que para  $\alpha \in (0, 1]$ , esta desigualdad se hace evidente al observar en la Figura 9 al Círculo Trigonométrico ubicado sobre el primer cuadrante del Plano Cartesiano; en donde  $\alpha$ , además de medir al ángulo que funge como el argumento de la función seno, también mide a la longitud del arco circular  $\widehat{BD}$  que corresponde a ese mismo ángulo, dado que el radio del Círculo Trigonométrico es unitario por definición; es decir,  $\alpha = \widehat{BD}$ . Por otro lado, la cantidad  $\sin \alpha$  mide a la longitud del segmento de recta  $\overline{CD}$ , o sea  $\sin \alpha = \overline{CD}$ ; el cual a su vez, funge como el cateto opuesto al ángulo  $\alpha$  en el triángulo rec-

tángulo  $\triangle OCD$ , por lo que es evidente el hecho de que la longitud del segmento  $\overline{CD}$  siempre será más pequeña que la del arco  $\widehat{BD}$ ; es decir,  $\overline{CD} < \widehat{BD} \Leftrightarrow \sin \alpha < \alpha$  para todo  $\alpha \in (0, \pi/2)$ .

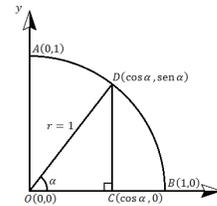


Figura 9. Primer cuadrante del plano cartesiano con el círculo trigonométrico

Por otro lado, la Figura 10 también ilustra la validez de la desigualdad  $\sin \alpha < \alpha$  para todo  $\alpha > 0$ , mientras que  $\sin \alpha > \alpha$  para todo  $\alpha < 0$  y  $\sin \alpha = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 0$ ; pues en dicha figura se muestran las gráficas de las funciones identidad y seno, es decir  $I(\alpha) = \alpha$  y  $S(\alpha) = \sin \alpha$ , respectivamente, de modo que es claro que para todo  $\alpha > 0$ , la gráfica de la función  $I$  siempre estará por encima de la gráfica de la función  $S$ ; o sea  $S(\alpha) < I(\alpha) \quad \forall \alpha > 0$ .

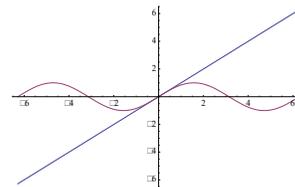


Figura 10. Gráfica de las funciones  $I(\alpha) = \alpha$  y  $S(\alpha) = \sin \alpha$

Ahora bien, si se toma  $\alpha = \frac{2\pi}{x}$  con  $x > 2$ , entonces se tiene que:

$$2 < x < \infty \Rightarrow 0 < 1/x < 1/2 \Rightarrow 0 < \alpha = 2\pi/x < \pi \therefore \alpha \in (0, \pi) \quad \forall x > 2$$

Luego, si se considera la identidad trigonométrica  $\sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$ , entonces:

$$2 \sin(\pi/x) \cos(\pi/x) = \sin(2\pi/x) = \sin \alpha < \alpha = 2\pi/x \therefore \pi - x \sin(\pi/x) \cos(\pi/x) > 0 \quad \forall x > 2$$

Por otro lado, se tiene que  $0 < \sin^2(\pi/x) < \sin^2(\pi/2) = 1$ , dado que  $2 < x < \infty$  implica que  $0 < \pi/x < \pi/2$  y además se tiene que  $x > 2 \Rightarrow x^3 > 8$ , por lo que  $x^3 \sin^2(\pi/x) > 0$  para todo  $x > 2$ ; finalmente, de todo lo anterior se deduce la siguiente:

$$\frac{\pi - x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x^3 \sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} > 0 \quad \forall x > 2$$

Ahora considérese a la siguiente función:

$$f(x) = \frac{1}{x \tan\left(\frac{\pi}{x}\right)} \quad \forall x > 2$$

Entonces, para este caso se tiene que el rango de la función  $\pi/x$  está dado por el intervalo abierto  $(0, \pi/2)$ , sin ningún tipo de discontinuidades o indeterminaciones para cualquier  $x > 0$ , además de que  $\tan(\pi/x) \neq 0$  para todo  $x > 2$ ; y por otro lado, al ser también  $x \neq 0$ , se concluye que  $f$  también carece de discontinuidades e indeterminaciones para todo  $x > 2$ , lo cual se ilustra en la Figura 11.

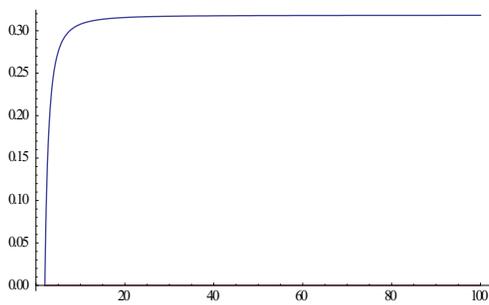


Figura 11. Gráfica de la función  $f(x)$

Luego, como la función  $f$  está definida a través de una multiplicación y una división de funciones continuas y diferenciables en todo  $x > 2$ , entonces  $f$  también es una función diferenciable y continua en todo  $x > 2$ ; por lo tanto, tiene sentido hablar de la derivada de esta función sobre su dominio definido por el intervalo  $(2, \infty)$ , en consecuencia:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{x \tan\left(\frac{\pi}{x}\right)} \right] = \frac{\pi - x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x^3 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} \quad \forall x > 2$$

Nótese que justo antes de haber definido la función  $f$ , se demostró que  $f'(x) > 0$  para todo  $x > 2$ ; lo que se aprecia en la Figura 12.

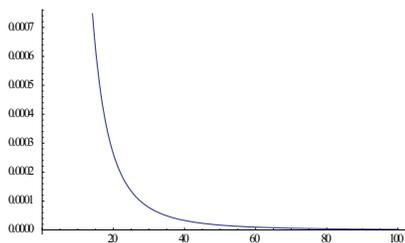


Figura 12. Gráfica de la derivada de la función  $f(x)$  (o sea  $f'(x)$ )

Lo anterior garantiza que la función  $f$  es estrictamente creciente sobre el intervalo  $(2, \infty)$ ; es decir,  $x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$  de modo que  $x_1 = x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ , para cualesquiera  $x_1, x_2 \in (2, \infty)$ .

Ahora bien, si un polígono regular tiene  $n$  lados, es claro que también tiene el mismo número  $n$  de ángulos; además, si al polígono en cuestión se le divide en  $n$  triángulos isósceles, todos idénticos entre sí, de modo que el centro de masa del polígono coincida con cada uno de los vértices opuestos al lado desigual de cada uno de estos triángulos (Figura 13); entonces es claro que  $\theta = 2\pi/n$ ; adicionalmente, si  $a$  es la apotema del polígono en cuestión, entonces  $l$  cada uno de sus  $n$  lados, entonces también es claro que  $a$  es la altura de cada uno de esos triángulos isósceles y  $l$  sus respectivos lados desiguales; así pues,  $a$  parte por la mitad a cada uno de estos triángulos, tal y como se muestra en la Figura 14.

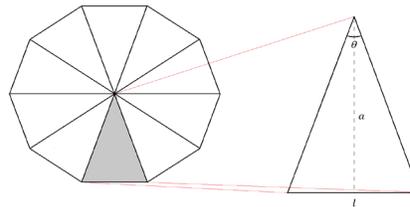


Figura 13. Ejemplo de un polígono regular de  $n$  lados dividido en  $n$  triángulos isósceles.

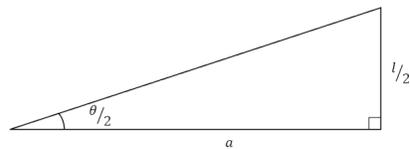


Figura 14. Una de las mitades de los triángulos isósceles mostrados en la Figura 28

Ahora bien, de acuerdo con la Figura 14 también se tiene la siguiente relación:

$$\tan(\theta/2) = (l/2)/a$$

Lo que implica que:

$$\frac{l}{2a} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \tan\left[\frac{(2\pi/n)}{2}\right] = \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Por lo tanto:

$$a = \frac{l}{2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Mientras que si el perímetro del polígono está dado por  $P = nl$ , entonces  $l = P/n$ ; en consecuencia:

$$a = \frac{l}{2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{\left(\frac{P}{n}\right)}{2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{P}{2n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Ergo, si  $A_n$  es el área de cualquier polígono regular de  $n$  lados, entonces se tiene lo siguiente:

$$A_n = \frac{Pa}{2} = \frac{P \left[ \frac{P}{2n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} \right]}{2} = \frac{P^2}{4n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{P^2}{4} \left[ \frac{1}{n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} \right]$$

Nótese que si  $n \in \mathbb{N}$  es el número de lados o ángulos que puede tener un polígono, entonces forzosamente  $n > 2$ ; pues dentro del contexto de la Geometría Euclidiana el tipo de polígono con el menor número posible de lados o ángulos que puede haber es el triángulo; por lo tanto, la relación anterior se puede expresar de la siguiente manera:

$$A_n = \frac{P^2}{4} f(n) \quad \forall n > 2$$

Finalmente, como ya se demostró que  $f$  es una función estrictamente creciente para cualquier valor dentro del dominio  $(2, \infty)$ ; entonces, en particular se tiene que para cualesquiera dos números naturales  $n_1$  y  $n_2$  distintos entre sí, tales que  $2 < n_1 < n_2$ , la desigualdad estricta  $f(n_1) < f(n_2)$  también es válida. Así pues, como  $P^2/4 > 0$  y por hipótesis se tiene que el valor de  $P$  es invariante ante cualquier número  $n$  de ángulos que tengan los polígonos en cuestión; entonces se tiene que:

$$n_1 < n_2 \Leftrightarrow A_{n_1} = \frac{P^2}{4} f(n_1) < \frac{P^2}{4} f(n_2) = A_{n_2}$$

Es decir, si dos polígonos regulares distintos entre sí tienen el mismo perímetro, entonces el que tenga la mayor área siempre será el que tenga el mayor número de lados o ángulos, lo que nos conduce a la primera especificación de la taza: El diseño exterior debe ser un hexágono, ya que todo lo anterior garantiza que, de las tres figuras que se consideraron, este es el polígono con la mayor área, o sea, esta será la forma óptima de la taza.

### DISEÑO DE ASA LATERAL

Una vez determinada la forma más adecuada para tesar el plano, el siguiente paso es diseñar el asa lateral. Así pues, se encuentran en el mercado tazas con forma cuadrada, rectangular, ovalada e incluso hexagonal, pero todas ellas presentan como característica general un asa externa. El diseño de la taza tradicional o no tradicional, pero con asa externa, implica que se desperdicia espacio perimetral alrededor de la misma, como consecuencia del “estorbo” que ocasiona el asa.

Debido a lo anterior, se considerará la siguiente solución: diseñar el asa para que, de ser un elemento externo, se convierta en un elemento interno; utilizando para ello una de las caras laterales del hexágono, de tal forma que siga teniendo la misma función y utilidad, pero que elimine el inconveniente que presenta, facilitando la manipulación de la misma, sin dejar de lado la estética visual y la capacidad del líquido contenido.

### DESCRIPCIÓN DEL DISEÑO PROPUESTO

El asa interna presenta tres ondulaciones que permiten la sujeción de la taza de forma ergonómica y segura (Figura 15). Como se observa, el asa no utiliza espacio fuera de la periferia hexagonal, sino que está inscrita en una de las caras laterales (inciso b, Figura 16).

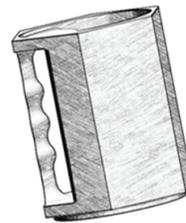


Figura 15. Vista lateral izquierda

La cavidad posterior del asa tiene una forma semicircular (a) que facilita la inserción de los dedos al momento de sujetar la misma y que ha determinado la forma de media luna de la cavidad interna (Figura 16).

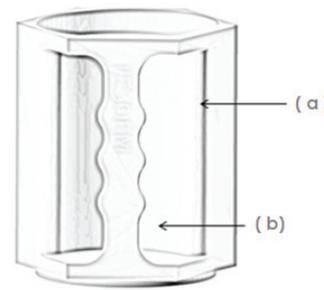


Figura 16. Vista anterior de la taza

El diseño hexagonal en conjunto con el asa interna, permiten que el espacio en el que se almacene la taza sea mejor aprovechado, disminuyendo el área sin utilizar en la periferia de la misma (Figura 17).

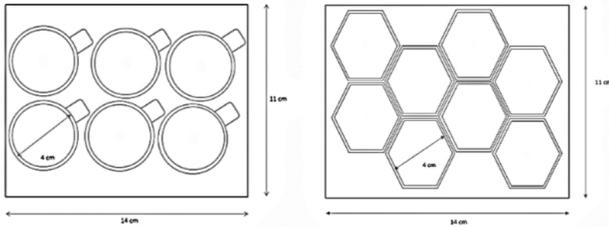


Figura 17. Vista superior de tazas

#### DISEÑO DE LA CAVIDAD INTERNA

Una vez seleccionado el diseño exterior de la taza, el siguiente paso fue determinar la figura interna, se decidió retomar el diseño actual (círculo), pero modificado por la incorporación del asa externa. El resultado obtenido fue una taza con diseño interior en forma de media luna. En la Figura 18 se observa la taza en dos tonos (azul y rojo) para diferenciar el interior del exterior.



Figura 18. Taza hexagonal

#### DISEÑO DE BASE INFERIOR

El último problema que falta por resolver, es la inestabilidad en el estibaje vertical para más de dos piezas. Para esto, se incorporará al diseño preliminar una base inferior circular de menor área que la boquilla superior, de modo que las tazas se puedan ensamblar unas con otras (Figura 19), sin que se colapsen ni derrame su contenido y sin que su estructura sufra daño alguno ni afecte su funcionamiento. En la Figura 19 se observa el ensamble de la base circular inferior (taza superior) dentro de la boquilla superior (taza inferior), así como la base y la boquilla.

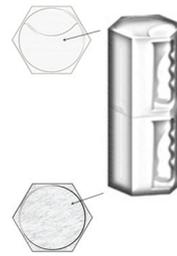


Figura 19. Vista frontal de tazas ensambladas horizontalmente

La base inferior y la boquilla superior facilitan el ensamble vertical, sin embargo y a pesar de que la estructura ha sido diseñada para un apilamiento vertical, las tazas se pueden almacenar también de forma horizontal, sin que se vea afectada la integridad del apilamiento (Figura 20).

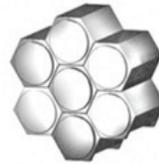


Figura 20. Vista inferior de tazas hexagonales estibadas de forma horizontal

Por otra parte, los acabados redondeados del asa y su cuerpo interno permiten una limpieza sencilla, sin que se acumulen residuos indeseables.

#### ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

El diseño propuesto permite teóricamente el aprovechamiento del espacio sustentado en la demostración del plano euclidiano y la comparación isoperimétrica, pero aún falta la parte experimental para su validación y verificación.

Durante el desarrollo de la propuesta se encontraron múltiples detalles susceptibles de mejorar, entre los posibles elementos a modificar, se consideran los siguientes:

*Resistencia del asa:* no se ha comprobado que el diseño soporte el peso de la taza al contener líquidos.

El peso promedio de una taza es de 356 gr y de acuerdo con el programa Solid Works, el peso aproximado del diseño en los materiales más comunes son: vidrio 891 gr, aluminio 980 gr, PET 515 gr y porcelana 835 gr; por lo que estos pesos están muy por encima de un diseño ergonómico aceptable. Así pues, se debe reducir el grosor de la taza por medio de un análisis de resistencia de materiales, hasta determinar un peso y resistencia acordes al uso proyectado.

El diseño interior de la taza, en forma de media luna, se puede optimizar por medio de un corte hiperbólico. Dicho corte permite maximizar el volumen del contenido al tiempo que minimiza la utilización de material y el consecuente desperdicio.

### CONCLUSIONES

El objetivo principal de este trabajo consistió en proponer el diseño de una taza que permitiera aprovechar el espacio cúbico de cualquier lugar de almacenaje, al mismo tiempo que una fácil manipulación. Al respecto, se concluye lo siguiente:

De acuerdo con la demostración del teorema de descomposición del Plano Euclidiano y la comparación isoperimétrica de polígonos regulares vistas en este trabajo, el hexágono es el polígono regular cuyo perímetro permite la máxima área.

Tal y como se observa en la Figura 19, la característica de interconectividad presente en el diseño permite un fácil apilamiento y manipulación, aún en lugares reducidos o en estibaciones de más de dos unidades, permitiendo así un mejor aprovechamiento del espacio cúbico.

El diseño obtenido (Figura 21) consiste en una taza hexagonal con asa lateral, la cual está contenida en la cara externa del hexágono que permite su fácil almacenamiento y manipulación, al tiempo que disminuye el desperdicio del espacio perimetral. El asa ergonómica permite una fácil sujeción, mientras que la forma circular de la base y la parte superior facilitan el almacenaje de las tazas, sin que haya riesgo de una caída o un colapso.



Figura 21. Taza hexagonal

Finalmente, es importante mencionar que, si bien se alcanzó el objetivo teóricamente, aún falta el desarrollo de la parte experimental que permita su validación y verificación.

### REFERENCIAS

Antiguo Perú. (2015). Recuperado de: El oro de Kuntur Wasi visita Lima: <http://www.antiguoperu.com/2015/04/el-oro-de-kuntur-wasi-exposicion-en-el.html>

- Apuntes-Teselaciones y teselados. (2017). *Revista Digital de Arquitectura*. Recuperado de <http://apuntesdearquitecturadigital.blogspot.com/2017/05/los-terminos-teselaciones-y-teselado.html>
- Camargo, L. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, 32, 4-8. Recuperado de <http://www.scielo.org.co/pdf/ted/n32/n32a01.pdf>
- CANADEVI. (2018). Cámara Nacional de la Industria de Desarrollo y Promoción de Vivienda. Recuperado de <https://www.canadevi.com.mx>
- Comisión Nacional de vivienda. (2017). Programa de labores 2016. Recuperado de [https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/112281/Programa\\_de\\_labores\\_2016.pdf](https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/112281/Programa_de_labores_2016.pdf)
- Davenport, G. (2002). *Objetos sobre una mesa I*. Madrid: Turner colección Noema.
- Di Leva, A. (2019). La Nación. Vivir en mini casas: una tendencia que crece en el país. Recuperado de <https://www.lanacion.com.ar/lifestyle/vivir-mini-casas-tendencia-crece-pais-nid2282100>
- Dunki, Coffee. (2013). Coffee Break. Ideas para mentes inquietas. Historia de la taza. Recuperado de <https://dunkincoffee.es/blog/historia-de-la-taza/>
- El legado de las Matemáticas: de Euclides a Newton. (2000). Andalucía: Consejería de cultura, Universidad de Sevilla. Recuperado de <https://euler.us.es/~libros/griegos.html>
- Escamilla, V. M. (2019). Crece la tendencia a vivir en 20 metros cuadrados en las ciudades. *Forbes México*. Recuperado de <https://www.forbes.com.mx/crece-tendencia-a-vivir-en-20-m-c2-b2-en-las-ciudades/>
- Euclides. (2020). Teselas de la alhambra: teselaciones periódicas del plano. Recuperado de <https://euclides59.wordpress.com/2015/07/06/teselaciones-periodicas-del-plano/>
- González, D. (2010). El siglo de Torreón. Los espacios reducidos de las casas van en contra de la salud. Recuperado de <https://www.elsiglodetorreon.com.mx/noticia/540696.los-espacios-reducidos-de-las-casas-van-en-contra-de-la-salud.html>
- Gutierrez, F. (2014). Ahorre espacio con los muebles multifuncionales. *El economista*.
- Hacia una vivienda saludable. (2018). Recuperado de [https://www.paho.org/per/index.php?option=com\\_docman&view=download&category\\_slug=viviendas-saludables-948&alias=68-guia-vivienda-saludable-8&Itemid=1031](https://www.paho.org/per/index.php?option=com_docman&view=download&category_slug=viviendas-saludables-948&alias=68-guia-vivienda-saludable-8&Itemid=1031)
- Historia y arqueología. (2016). Arqueólogos descubren utensilios de cocina de hace 12.000 años en Anatolia (Turquía). Recuperado de <http://www.historiayarqueologia.com/2017/02/arqueologos-descubren-utensilios-de.html>
- INEGI. (2015). Hogares y vivienda. Vivienda. Recuperado de <https://www.inegi.org.mx/temas/vivienda/>
- Normatividad en materia de vivienda. (2017). Normatividad aplicable para la Comisión Nacional de Vivienda. Recuperado de <https://www.gob.mx/conavi/documentos/normatividad-en-materia-de-vivienda>
- Pellini, C. (2015). Historia y biografías. Historia de la cerámica: origen, evolución y técnicas. Recuperado de [https://historiay biografias.com/historia\\_ceramica/](https://historiay biografias.com/historia_ceramica/)

- Shutterstock. (2020). Fotos de tazas rotas. Recuperado de [https://www.shutterstock.com/es/search/tazas+rotas?image\\_type=photo](https://www.shutterstock.com/es/search/tazas+rotas?image_type=photo)
- Treasures of the Museums in Athens. (2020). National Archeological Museum, Athens. Recuperado de <http://rolfgross.dreamhosters.com/Greece-Web/AthensMuseums/AthensMuseums.htm>
- Trejo, M. A. (2007). *Geometría del adelgazamiento sobre el complejo celular cuadrático y sobre el complejo celular hexagonal* (Tesis de posgrado). México. Instituto Politécnico Nacional.
- United Nations Department of Public Information. (2019). Naciones Unidas. Recuperado de [https://population.un.org/wpp/Publications/Files/WPP2019\\_PressRelease\\_ES.pdf](https://population.un.org/wpp/Publications/Files/WPP2019_PressRelease_ES.pdf)
- Venta de casas en Pachuca. (2020). Crédito infonavit. Recuperado de <http://www.casasempachuca.com.mx/casas-en-pachuca-infonavit-dos-recamaras.html#.XwIhMChKJIU>
- Whelan, E. (2019). Ancient Origins. Recuperado de <https://www.ancient-origins.es/noticias-historia-arqueologia/copas-cra-neo-005158>

#### BIBLIOGRAFÍA SUGERIDA

- Aiden, I. (2011). ¡Tazas! Recuperado de <https://istiaiden.wordpress.com/2011/05/25/%C2%A1tazas/>
- Donoso, S. F. (2016). El diseño industrial; las fronteras confusas de la creatividad. *Ciencia, Docencia y Tecnología*, 27(53), 342-361. Recuperado el 25 de febrero de 2020. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=14548520014>
- Durán, O. (2011). El diseño industrial y el cambio tecnológico- Apuntes desde estudios CTS. *Revista Colombiana de Filosofía de la Ciencia*, 11(22), 97-114. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=41421595009>
- Duren, N. L. (2017). ¿Por qué allí? Los motivos por los que los promotores privados de vivienda social construyen en las periferias de las ciudades de América Latina. *IDB Working Paper Series*. <http://dx.doi.org/10.18235/0000975>
- Etienne-Nugue, J. (2009). *Háblame de la artesanía*. México: Unesco.
- Freepick. (2020). Vista superior de tazas de té conjunto aislado vector gratuito. Recuperado de [https://www.freepik.es/vector-gratis/vista-superior-tazas-te-conjunto-aislado\\_7588813.htm](https://www.freepik.es/vector-gratis/vista-superior-tazas-te-conjunto-aislado_7588813.htm)
- Mulero-González, J. e. a. (2014). *Las matemáticas de nuestra vida*. Universidad de Alicante.
- My introduction. (2019). Recuperado de <https://steemit.com/introduceyourself/@andeluz/my-introduction>
- Taza. (2017). Recuperado de <https://es.wikipedia.org/wiki/Taza>

#### Cómo citar:

Paredes-Paramo, L., Martínez-Cruz, M. Á., Trejo-Martínez, A., Chávez-Pichardo, M. & Arenas-Resendiz, T. (2022). Prototipo de taza hexagonal para un mejor almacenaje espacial sin desperdicio de área perimetral. *Ingeniería Investigación y Tecnología*, 23(01),1-11. <https://doi.org/10.22201/fi.25940732e.2022.23.1.002>