



## Etapas del análisis de frecuencias conjunto de crecientes con la distribución GVE biviada

### Stages of the joint flood frequencies analysis with the bivariate GEV distribution

---

Campos-Aranda Daniel Francisco

Profesor Jubilado de la UASLP

Correo: [campos\\_aranda@hotmail.com](mailto:campos_aranda@hotmail.com)

<https://orcid.org/0000-0002-9876-3967>

#### Resumen

Las crecientes que ocurren en nuestro país cada año, generan daños y ponen en peligro a la infraestructura hidráulica de los embalses, cuyo dimensionamiento por seguridad hidrológica está basado en el *hidrograma de la creciete de diseño*. La estimación más simple de tal hidrograma se realiza con el análisis de frecuencias *conjunto* del gasto pico y volumen anuales. En este estudio se ajustó la *distribución General de Valores Extremos biviada* (GVEb), al registro de 52 crecientes anuales de entrada a la Presa Venustiano Carranza, del estado de Coahuila, México. Este proceso abarca ocho *etapas*: 1) verificación de la aleatoriedad de los registros anuales; 2) estimación de las probabilidades empíricas conjuntas; 3) ajuste de la GVEb mediante método de máxima verosimilitud; 4) validación de la función GVEb; 5) ratificación de las marginales GVE; 6) verificación de las restricciones de probabilidad; 7) estimación de los eventos de diseño univariados híbridos y 8) conjuntos con selección del subgrupo crítico. La etapa 4 es la más importante, por el contraste entre probabilidades conjuntas teóricas y empíricas; las primeras estimadas con la GVEb y las segundas obtenidas en el plano bidimensional. La etapa 1 se realiza con base en el Test de Wald-Wolfowitz. En la etapa 3 se emplea el algoritmo Complex. Las etapas 4 y 5 utilizan el Test de Kolmogorov-Smirnov. En la etapa 8 se emplea la gráfica del periodo de retorno conjunto de tipo AND. Por último, se formulan las conclusiones, las cuales destacan las ventajas de aplicar la GVEb.

**Descriptor:** Distribución GVEb, distribuciones condicionales, probabilidades empíricas conjuntas, algoritmo Complex, validación de la GVEb, periodos de retorno conjuntos, eventos críticos.

#### Abstract

The floods that occur in our country every year, cause damages and endanger the hydraulic infrastructure of the reservoirs. Therefore, its safety hydrological dimensioning is based on the *hydrograph of the design flood*, its simplest estimation is made with the *joint frequency analysis* of the annual peak flow and volume. In this study, the *bivariate General Extreme Values distribution* (GEVb) was adjusted to the record of the 52 annual floods of entry to the Venustiano Carranza Dam, in the state of Coahuila, Mexico. This process encompasses eight *stages*: 1) verification of the randomness of the annual records; 2) estimation of the joint empirical probabilities; 3) adjustment of the GEVb function through the maximum likelihood method; 4) validation of the GEVb function; 5) ratification of GEV marginal functions; 6) verification of probability constraints; 7) estimation of hybrid univariate design events and 8) estimation of joint design events and selection of the critical subgroup. Stage 4 is the most important, due to the contrast between theoretical and empirical joint probabilities; the first ones estimated with the GEVb and the second ones obtained in the two-dimensional plane. Stage 1 is carried out based on the Wald-Wolfowitz Test. In stage 3 the Complex algorithm is used. Stages 4 and 5 use the Kolmogorov-Smirnov Test. In stage 8, the graphs of the joint return period of type AND are used. Finally, Conclusions are formulated, which highlight the advantages of applying the GEVb.

**Keywords:** GEVb distribution, conditional distributions, joint empirical probabilities, Complex algorithm, GEVb validation, joint return periods, critical events.

**INTRODUCCIÓN**

De manera preponderante, la porción centro-sur de la República Mexicana se localiza en la zona de influencia de los huracanes que se originan en los océanos Atlántico y Pacífico. Por otra parte, su porción norte la afectan los frentes fríos. Ambos fenómenos meteorológicos generan lluvias de gran magnitud, que producen *crecientes o avenidas máximas*, las cuales inundan extensas regiones y ponen en peligro a las obras hidráulicas (Aldama, 2000; Aldama *et al.*, 2006).

Quizás la obra hidráulica más importante, por sus beneficios y peligrosidad de falla, sean los *embalses* de todo tipo. En relación con su dimensionamiento de seguridad hidrológica, desde hace dos décadas, sus *Crecientes de Diseño* se analizan como *eventos multivariados*, ya que las características que definen su *hidrograma* están correlacionadas. El enfoque más simple, el *bivariado*, está justificado por la escasa sensibilidad que tienen los embalses al lapso en que se llega al gasto pico del hidrograma (Aldama, 2000) y por la correlación que guardan tal gasto máximo con el volumen y el volumen con la duración total (Goel *et al.*, 1998; Yue *et al.*, 1999; Yue & Rasmussen, 2002).

Ramírez & Aldama (2000), Yue & Rasmussen (2002) y Volpi & Fiori (2012) destacan que el análisis de frecuencias bivariado conduce a una infinidad de combinaciones de gasto pico y volumen para una probabilidad de excedencia *conjunta* adoptada. Lo anterior implica que para un mismo *periodo de retorno conjunto* existen muchas *crecientes o hidrogramas* que producirán distintos efectos en el embalse que se diseña o revisa; adoptando lógicamente, el que genera las condiciones más críticas o severas en su vertedor y almacenamiento.

Los *objetivos* de este estudio fueron los cinco siguientes:

- 1) Exponer la distribución General de Valores Extremos bivariada (GVEb) y su método de ajuste por máxima verosimilitud.
- 2) Citar las ecuaciones de los periodos de retorno conjuntos.
- 3) Detallar la selección de los eventos de diseño críticos y la estimación de las probabilidades empíricas conjuntas.
- 4) Exponer la técnica de validación de la GVEb y de sus marginales.
- 5) Aplicar la teoría operativa al registro de 52 gastos pico y volúmenes anuales de las crecientes de entrada a la Presa Venustiano Carranza (*Don Martín*), del estado de Coahuila, México.

**TEORÍA OPERATIVA**

DISTRIBUCIÓN GVE BIVARIADA (GVEb)

Emil Julius Gumbel estableció a inicios de los años sesenta el llamado *modelo bivariado logístico*, el cual acepta como distribuciones *marginales* las de valores extremos: Gumbel, General de Valores Extremos (GVE), Gumbel mixta y TCEV o de valores extremos de dos componentes (Escalante & Raynal, 1994; Ramírez & Aldama, 2000; Escalante & Reyes, 2004), su ecuación es:

$$F(x,y) = \exp\{-[(-\ln F(x))^m + (-\ln F(y))^m]^{1/m}\} \quad (m \geq 1) \quad (1)$$

Donde:

$F(x)$  y  $F(y)$  = funciones de distribución de probabilidades (FDP) *marginales* de las variables aleatorias  $X$  y  $Y$   
 $m$  = parámetro de asociación, el cual depende de la correlación entre las variables

Si las marginales son distribuciones GVE o General de Valores Extremos (Hosking & Wallis, 1997; Rao & Hamed, 2000; Stedinger, 2017), sus expresiones son:

$$F(x) = \exp\left\{-\left[1 - k_1 \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1}\right)\right]_+^{1/k_1}\right\} \quad (2)$$

$$F(y) = \exp\left\{-\left[1 - k_2 \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2}\right)\right]_+^{1/k_2}\right\} \quad (3)$$

$u, \alpha$  y  $k$  son los parámetros de ubicación, escala y forma. Sustituyendo las ecuaciones 2 y 3 en la 1, se obtiene la FDP de la GVEb (Escalante & Raynal, 1994):

$$F(x,y,\theta) = \exp\left\{-\left[\left(1 - k_1 \left(\frac{x-u_1}{\alpha_1}\right)\right)_+^{m/k_1} + \left(1 - k_2 \left(\frac{y-u_2}{\alpha_2}\right)\right)_+^{m/k_2}\right]^{1/m}\right\} \quad (4)$$

con  $\theta = u_1, \alpha_1, k_1, u_2, \alpha_2, k_2, m$ ; son los siete parámetros de ajuste y se obtienen con el método estadístico de máxima verosimilitud.

La distribución GVE representa tres modelos probabilísticos: si  $k < 0$  la GVE tiene el tipo Fréchet, sin límite superior; caso aquí estudiado; si  $k = 0$  se tiene el modelo Gumbel y cuando  $k > 0$  se tiene la Weibull, con límite superior. La distribución GVE está definida por el conjunto  $\{x: [1 - k(x - u)/\alpha] > 0\}$ , lo cual se indica con el signo + afuera del paréntesis.

Coles (2001) destaca que cualquier combinación de parámetros de ajuste que viola la condición anterior de

positividad, implica que al menos uno de los puntos observados ( $x_i$ ), está más allá de los puntos finales de la distribución y entonces la función de verosimilitud es cero y su versión logarítmica  $-\infty$ .

La solución inversa de las ecuaciones 2 y 3, permiten la estimación de predicciones ( $x_p, y_p$ ) asociadas a una probabilidad de no excedencia  $p = F(x)$  ó  $p = F(y)$ , son las siguientes:

$$x_p = u_1 + \alpha_1/k_1\{1 - [-\ln(p)]^{k_1}\} \quad \text{para } k_1 \neq 0 \quad (5)$$

$$y_p = u_2 + \alpha_2/k_2\{1 - [-\ln(p)]^{k_2}\} \quad \text{para } k_2 \neq 0 \quad (6)$$

En este estudio se ajustó la distribución GVE con tres métodos: Sextiles, momentos L y máxima verosimilitud, los cuales se pueden consultar respectivamente en: Campos (2006), Hosking & Wallis (1997) y Rao & Hamed (2000).

#### RESTRICCIONES DE PROBABILIDAD

Las probabilidades de no excedencia univariadas y conjunta de la distribución GVEb, deben cumplir con la restricción siguiente (Escalante & Raynal, 1994; Ramírez & Aldama, 2000; Escalante, 2004):

$$F_X(x) \cdot F_Y(y) < F(x,y) < \min [F_X(x), F_Y(y)] \quad (7)$$

#### MÉTODO DE MÁXIMA VEROSIMILITUD

Para una muestra aleatoria ( $X_1, X_2, \dots, X_n$ ) de observaciones independientes e idénticamente distribuidas (*iid*) que siguen una FDP denominada  $F_\theta$  con parámetros de ajuste  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ . La probabilidad de obtener un valor  $X_p$  será (Rao & Hamed, 2000; Coles, 2001; Meylan *et al.*, 2012):

$$P(x_i \leq X \leq x_i + dx_i) = f_\theta(x_i) \cdot dx_i \quad (8)$$

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \left\{ -(\ln \alpha_1 + \ln \alpha_2) + \ln \left[ 1 - k_1 \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right)_+^{k_1 - 1} \right] + \ln \left[ 1 - k_2 \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right)_+^{k_2 - 1} \right] + \ln \left[ \left( 1 - k_1 \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right)_+^{m/k_1} + \left( 1 - k_2 \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right)_+^{m/k_2} \right)^{\frac{1}{m-2}} \right] + \ln \left[ (m-1) + \left( \left( 1 - k_1 \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right)_+^{m/k_1} + \left( 1 - k_2 \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right)_+^{m/k_2} \right)^{1/m} \right) - \left[ \left( 1 - k_1 \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right)_+^{m/k_1} + \left( 1 - k_2 \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right)_+^{m/k_2} \right)^{1/m} \right] \right) \right] \right\} \quad (11)$$

siendo,  $f_\theta(x_i)$  la función de densidad de probabilidad. Como los datos son *iid*, la probabilidad de obtener los  $n$  valores  $X_p$  será la probabilidad conjunta o *función de verosimilitud*, designada  $L$  del inglés *likelihood*; cuya ecuación es:

$$L(\theta) = f_\theta(x_1) \cdot f_\theta(x_2) \cdots f_\theta(x_n) = \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i) \quad (9)$$

El método de máxima verosimilitud consiste en encontrar un vector  $\hat{\theta}$  de parámetros que hagan máxima a  $L(\theta)$  y por lo tanto, a la probabilidad de obtener la muestra ( $X_1, X_2, \dots, X_n$ ). Con frecuencia, resulta más conveniente tomar logaritmos y trabajar con la *función logarítmica de verosimilitud* (Coles, 2001), es decir:

$$l(\theta) = \log L(\theta) = \sum_{i=1}^n \log f_\theta(x_i) \quad (10)$$

Lo anterior, es aceptable debido a que la función logarítmica es monótonica y entonces la función  $l(\theta)$  alcanza su máximo en el mismo punto que la función  $L(\theta)$ .

#### $l(\theta)$ DE LA DISTRIBUCIÓN GVEb

La función logarítmica de verosimilitud de la GVEb para el caso simple de variables aleatorias  $X, Y$  con igual amplitud de registro ( $n$ ), ha sido expuesta por Escalante & Raynal (1994) y es la ecuación (11).

#### EL ALGORITMO COMPLEX

La maximización de la ecuación 11 para obtener los siete parámetros *óptimos* de ajuste ( $\theta = u_1, \alpha_1, k_1, u_2, \alpha_2, k_2, m$ ). de la distribución GVEb, debe ser abordada de manera *numérica* dada la complejidad de tal ecuación y de sus derivadas parciales respecto a  $\theta$ . Para ello, se seleccionó el algoritmo Complex, de múltiples variables acotadas (Box, 1965), que es una técnica de exploración local, cuyos antecedentes, proceso operativo y su código en lenguaje *Basic*, se pueden consultar en Campos (2003). En Bunday (1985) se tiene otra descripción y código de este método de búsqueda.

El número de variables de decisión y dependientes son siete ( $u_1, \alpha_1, k_1, u_2, \alpha_2, k_2, m$ ) y  $2n$  (dos veces el número de años del registro); pues las variables dependientes son las restricciones de positividad:  $[1 - k_1(x_i - u_1) / \alpha_1]$  y  $[1 - k_2(y_i - u_2) / \alpha_2]$ . Se asigna el signo negativo a la función objetivo, debido a que el algoritmo Complex minimiza tal función y se desea maximizar el resultado de la ecuación 11.

PERIODOS DE RETORNO UNIVARIADOS

La probabilidad de un evento se define como el cociente del número de casos favorables ( $ncf$ ) entre el número de casos posibles ( $ncp$ ) a dicho evento y varía de cero a uno. Debido al manejo *anual* de las variables  $X, Y$ , la probabilidad de excedencia  $F(x)$  es igual al recíproco del *periodo de retorno* ( $T_x$ ) en años; pues en cada año se tiene,  $ncf = 1$  y  $ncp = T_x$ , entonces (Yue & Rasmussen, 2002; Shiau, 2003):

$$T_x = \frac{1}{F(x)} = \frac{1}{1 - F(x)} \tag{12}$$

$$T_y = \frac{1}{F(y)} = \frac{1}{1 - F(y)} \tag{13}$$

En las expresiones anteriores,  $F(x)$  y  $F(y)$  se estiman con las ecuaciones 2 y 3.

PERIODOS DE RETORNO CONJUNTOS

El primer *periodo de retorno conjunto* del evento ( $X, Y$ ) se define bajo la condición OR y la ecuación 14 de la manera siguiente (Goel *et al.*, 1998; Yue, 2000b; Shiau, 2003):

$$T(x,y) = \frac{1}{1 - F(x,y)} \tag{14}$$

$F(x,y)$  es la probabilidad de no excedencia *conjunta* que se estima con la ecuación 4, previa estimación de sus parámetros de ajuste óptimos ( $u_1, \alpha_1, k_1, u_2, \alpha_2, k_2, m$ ) con el método de máxima verosimilitud. Este evento representa el caso en que los límites  $x$  ó  $y$ , o ambos *pueden* ser excedidos.

El segundo *periodo de retorno conjunto* del evento ( $X, Y$ ) está asociado al caso en que ambos límites *son* excedidos ( $X > x, Y > y$ ) o condición AND, su ecuación es (Goel *et al.*, 1998; Aldama, 2000; Ramírez & Aldama, 2000; Yue, 2000b y Shiau, 2003):

$$T'(x,y) = \frac{1}{F(x,y)} = \frac{1}{1 + F(x,y) - F_x(x) - F_y(y)} \tag{15}$$

Aldama (2000) obtiene la expresión  $F'(x,y)$  de la probabilidad conjunta de excedencia mediante un razonamiento de probabilidades lógico y simple aplicado en el plano cartesiano. En cambio, Yue y Rasmussen (2002) recurren al plano cartesiano para definir numéricamente un evento bivariado ( $X, Y$ ), que puede ocurrir en alguno de los cuatro cuadrantes.

Diversos autores (Yue, 2000b; Yue & Rasmussen, 2002; Shiau, 2003) han mostrado las gráficas de los dos periodos de retorno conjuntos y han discutido sus diferencias. En la Figura 1 se muestra la gráfica del periodo de retorno conjunto  $T'(Q,V)$ , construida con los datos de la aplicación numérica que será expuesta.

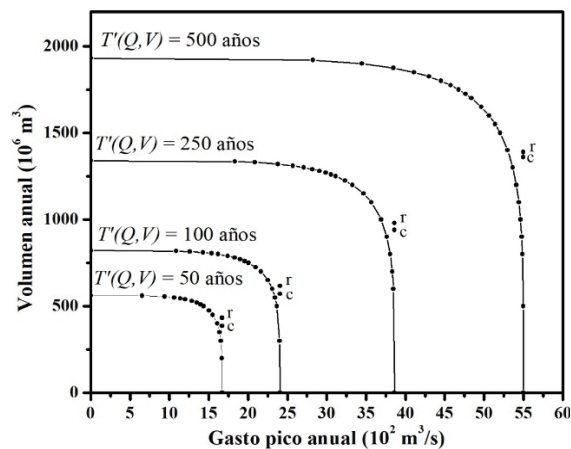


Figura 1. Gráficas de los cuatro periodos de retorno conjunto  $T'(Q,V)$  de diseño, de las crecientes de entrada a la presa Venustiano Carranza (*Don Martín*), México

De acuerdo con Yue *et al.* (1999), Yue (2000b) y Yue & Rasmussen (2002) existe un tercer tipo de *periodo de retorno conjunto*, que tiene aplicación en la práctica hidrológica y que se define para un evento  $X$  dado que  $Y \leq y$  o para un evento  $Y$  dado que  $X \leq x$  y por ello, se designan *condicionales*. Para tales eventos, sus distribuciones de probabilidad condicional se definen de manera simple, con estas ecuaciones:

$$F(X|Y \leq y) = \frac{F(x,y)}{F(y)} \tag{16}$$

$$F(Y|X \leq x) = \frac{F(x,y)}{F(x)} \tag{17}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación 14, se obtienen las fórmulas del *periodo de retorno conjunto condicional*:

$$T_{x|y} = \frac{1}{1 - F(X|Y \leq y)} \tag{18}$$

$$T_{y|x} = \frac{1}{1 - F(Y|X \leq x)} \tag{19}$$

### EVENTOS CRÍTICOS DEL $T'(x,y)$

Volpi y Fiori (2012) destacan que la gráfica del periodo de retorno conjunto de tipo AND, mostrada como Figura 1, presenta una severa inconsistencia al contener, en un contexto bivariado, umbrales críticos univariados. Debido a lo anterior, tal gráfica se considera integrada por dos porciones, las dos designadas *simples* (*naive part*) y la *correcta* (*proper part*). Las partes rectas son las colas o rectas asíntotas a la parte curva. La probabilidad de ocurrencia de un evento o pareja de  $Q$  y  $V$ , es variable en la parte curva y decrece a lo largo de la parte recta, aunque todos los valores definen el mismo periodo de retorno conjunto. En resumen, las parejas de valores de las rectas asíntotas tienen probabilidades de ocurrencia bajas y por ello no deben ser incluidos en los análisis de búsqueda de las crecientes ( $Q$  y  $V$ ) críticas o severas.

### TEST DE WALD-WOLFOWITZ

Esta prueba no paramétrica ha sido utilizada por Bobée & Ashkar (1991), Rao & Hamed (2000) y Meylan *et al.* (2012) para probar *independencia* y *estacionariedad* en registros de gastos máximos anuales ( $X_i$ ). Permite verificar su aleatoriedad, cuando su estadístico  $U$  no excede de 1.96, en una prueba con nivel de significancia de 5 %.

### ESTIMACIÓN DE PROBABILIDADES EMPÍRICAS

Las probabilidades de no excedencia *empíricas* univariadas y bivariadas se estimaron con base en la fórmula de Cunnane, que de acuerdo con Stedinger (2017) conduce a probabilidades de no excedencia ( $p$ ) aproximadamente insesgadas, su expresión es:

$$p = \frac{i - 0.40}{n + 0.20} \quad (20)$$

siendo  $i$  el número del dato cuando se ordenan de menor a mayor y  $n$  su número total.

Para la estimación de las probabilidades empíricas bivariadas se siguió el mismo principio que aplica para la ecuación 20 (Yue *et al.*, 1999; Yue, 2000b; Yue & Rasmussen, 2002), por ello se trabajó en el plano bidimensional, con los datos ordenados en forma progresiva; los gastos pico ( $Q$ ) en los renglones y los volúmenes ( $V$ ) en las columnas. El plano formado es un cuadrado de  $n$  por  $n$  casillas, con  $n$  casillas en su diagonal principal, cuando el número de orden del renglón es igual al de la columna. Después cada pareja de datos anuales ( $Q$  y  $V$ ) se localiza en el plano bidimensional y la casilla definida por la intersección del renglón y columna se identifica con el número  $i$  que corresponde al año histórico dibujado.

Cuando las  $n$  parejas de datos están dibujadas, se busca el año 1 y se define un área rectangular o cuadrada de valores menores de  $Q$  y de  $V$ , cuyo *conteo* de casillas numeradas dentro, es  $NM_i$  o combinaciones de  $Q$  y  $V$  menores. Calculados los  $n$  valores de  $NM_i$ , se aplica la ecuación 20 para calcular la probabilidad *empírica* conjunta:

$$F_e(x,y) = P(Q \leq q, V \leq v) = \frac{NM_i - 0.40}{n + 0.20} \quad (21)$$

### VALIDACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN GVEB

Esta es la etapa más importante del proceso de ajuste de la GVEB, pues en ella se verifica que tal modelo reproduzca fielmente las probabilidades conjuntas observadas (ecuación 21). Yue (2000a) indica que la forma más simple de representar las probabilidades conjuntas empíricas y teóricas, consiste en llevar al eje de las abscisas la primera y al eje de las ordenadas la segunda; lógicamente cada pareja de datos define un punto que coincide o se aleja de la recta a 45°.

Yue (2000b) y Yue & Rasmussen (2002) aplican el test de Kolmogorov-Smirnov con un nivel de significancia ( $\alpha$ ) de 5 % para aceptar o rechazar la *diferencia máxima absoluta* ( $dma$ ) entre las probabilidades conjuntas. Para evaluar la estadística ( $D_n$ ) del test, se utilizó la expresión que exponen Meylan *et al.* (2012), para  $\alpha = 5$  % es:

$$D_n = 1.358 / \sqrt{n} \quad (22)$$

$n$  es el número de datos. Si la  $dma$  es menor que  $D_n$  se acepta la GVEB.

### CRECIENTES DE ENTRADA A LA PRESA VENUSTIANO CARRANZA, MÉXICO

Aldama *et al.* (2006) exponen los 52 gastos máximos y sus volúmenes de las crecientes anuales que entran a la Presa Venustiano Carranza (*Don Martín*), en el estado de Coahuila, México. Su área de cuenca es de 31034 km<sup>2</sup>. Tales datos se muestran en la Tabla 1.

### RESULTADOS Y SU DISCUSIÓN

#### VERIFICACIÓN DE LA ALEATORIEDAD

A los registros de gasto pico y volumen anual de la Tabla 1 se les aplicó el test de Wald-Wolfowitz, para probar su independencia y estacionariedad. Se encontró que ambas series son *aleatorias*, con  $U = 0.726$  y  $U = 1.054$ .

Tabla 1. Gastos pico, volúmenes y sus números de orden bivariados de las crecientes que ingresaron a la Presa Venustiano Carranza, México (Aldama et al., 2006)

Año	Q (m <sup>3</sup> /s)	V (Mm <sup>3</sup> )	NM <sub>i</sub>	Año	Q (m <sup>3</sup> /s)	V (Mm <sup>3</sup> )	NM <sub>i</sub>
1930	241.0	38.76	19	1956	68.6	13.75	3
1931	89.2	53.59	8	1957	451.2	83.73	36
1932	1071.2	403.78	49	1958	1342.1	529.11	51
1933	203.2	62.10	21	1959	521.6	94.18	38
1934	90.7	11.48	3	1960	99.5	33.31	10
1935	431.2	75.40	34	1961	569.4	161.03	42
1936	62.0	64.75	4	1962	92.8	12.03	4
1937	138.3	19.64	11	1963	340.8	33.13	15
1938	166.3	35.01	17	1964	586.4	156.79	42
1939	134.2	16.99	9	1965	214.6	38.78	19
1940	182.1	21.18	12	1966	76.8	19.12	4
1941	252.1	43.43	21	1967	425.6	215.79	38
1942	339.7	63.62	28	1968	119.6	33.24	11
1943	284.8	35.02	19	1969	50.9	25.81	3
1944	655.9	269.58	46	1970	511.3	246.39	42
1945	146.7	28.04	13	1971	4320.7	983.02	52
1946	243.4	93.00	27	1972	214.2	129.87	25
1947	339.4	63.61	27	1973	449.2	65.18	33
1948	238.4	99.71	27	1974	756.5	244.05	46
1949	97.7	55.93	11	1975	751.6	169.43	44
1950	280.2	71.81	28	1976	614.3	466.05	46
1954	115.5	34.09	12	1995	80.6	13.48	3
1952	114.7	14.87	7	1996	47.6	4.69	2
1953	238.4	99.71	27	1997	87.4	15.96	5
1954	367.0	39.17	23	1998	29.5	3.75	1
1955	213.5	56.00	21	1999	85.0	64.22	7

AJUSTE DE LA DISTRIBUCIÓN GVE

A los registros de la Tabla 1, se les ajustaron distribuciones GVE con los métodos de sextiles, momentos L y máxima verosimilitud. En la Tabla 2 se muestran los estadísticos básicos y los valores de los parámetros de ajuste de cada distribución GVE.

BÚSQUEDA DE LOS PARÁMETROS ÓPTIMOS DE LA GVE<sub>B</sub>

Debido a la gran similitud que mostraron los parámetros de ajuste de la distribución GVE en la Tabla 2, con los tres métodos aplicados para ambos registros, se decidió adoptar a los valores inferiores, iniciales y superiores de cada variable de decisión, con base en tales resultados; quedando así:  $u_1$  (160,167,175),  $\alpha_1$  (125,138,148),  $k_1$  (-0.50,

-0.52, -0.54),  $u_2$  (38,40,49),  $\alpha_2$  (42,43,47) y  $k_2$  (-0.512, -0.535, -0.545). Además, se definieron cinco intervalos para el parámetro de asociación ( $m$ ) y se adoptó como inicial el valor medio, tales límites fueron: 1.0 a 1.5, 1.5 a 2.0, 2.0 a 2.5, 2.5 a 3.0 y 3.0 a 3.5. En la Tabla 3 se muestran los resultados principales de las cinco corridas numéricas del algoritmo Complex. Los valores de la última columna se estimaron como se detalla en seguida.

Con base en los parámetros de ajuste óptimos, expuestos en las columnas 4 a 7 de la Tabla 3, se estimaron con la ecuación 4 las probabilidades de no excedencia conjunta teórica  $F(x,y)$ , utilizando los datos  $x_i, y_i$  de la Tabla 1. Con base en la ecuación 21 y su procedimiento gráfico descrito, se calcularon las llamadas probabilidades de no excedencia empíricas bivariadas  $F_e(x,y)$ , contra las cuales se contrastan los valores de la  $F(x,y)$ .

Tabla 2. Parámetros estadísticos y de ajuste de la distribución GVE en los registros de gasto pico y volumen anuales de entrada a la Presa Venustiano Carranza, México

Parámetros estadísticos					Datos	Parámetros de ajuste		
Media	Mediana	<i>Cv</i>	<i>Cs</i>	<i>Ck</i>	( <i>ma*</i> )	Ubicación	Escala	Forma
377.8	226.5	1.636	5.372	36.063	Q (sx)	167.2507	124.9967	-0.5404
					Q (mL)	160.2071	137.6962	-0.5178
					Q (mv)	174.8915	148.3761	-0.4974
					V (sx)	37.9797	43.3311	-0.5354
110.1	55.9	1.525	3.457	17.364	V (mL)	39.6841	41.6717	-0.5449
					V (mv)	46.8705	47.0951	-0.5120

\* método de ajuste: (sx) sextiles, (mL) momentos L y (mv) máxima verosimilitud

Tabla 3. Resultados óptimos del algoritmo Complex durante la maximización de la ecuación 11, con las crecientes de entrada a la Presa Venustiano Carranza, México

FO inicial	FO final	Núm. Iter.	Parámetros de ajuste			<i>m</i> inic.	<i>rx<sub>y</sub></i>
			<i>u<sub>1</sub></i> , <i>u<sub>2</sub></i>	<i>α<sub>1</sub></i> , <i>α<sub>2</sub></i>	<i>k<sub>1</sub></i> , <i>k<sub>2</sub></i>	<i>m</i> final	<i>dma</i>
549.8	537.8	141	162.540	125.003	-0.500	1.25	0.9872
			46.894	42.006	-0.512	1.50	0.1637
538.7	527.2	163	160.167	125.000	-0.500	1.75	0.9924
			43.458	42.002	-0.512	2.00	0.1164
528.7	517.8	121	160.000	125.002	-0.500	2.25	0.9952
			39.713	42.001	-0.512	2.50	0.0802
519.9	509.6	116	163.902	125.003	-0.500	2.75	0.9933
			44.067	42.000	-0.512	3.00	0.1116
512.2	502.3	97	161.897	125.001	-0.500	3.25	0.9959
			38.000	42.000	-0.512	3.50	0.0658

La mejor correspondencia o similitud entre ambas probabilidades conjuntas  $F_c(x,y)$  y  $F(x,y)$ , se obtuvo para la quinta aplicación numérica del algoritmo Complex, con un valor del coeficiente de correlación ( $r_{xy}$ ) de 0.9959 y diferencias máximas positiva y negativa de 0.0630 y -0.0658, que se indican sombreadas en la Tabla 4.

diferencias positivas (24) y negativas (28). También se indican en un círculo las diferencias máximas negativa (pareja 38) y positiva (pareja 44). El valor del estadístico del test de Kolmogorov-Smirnov es 0.1883 (ecuación 22), por lo cual, la distribución GVEb es aceptada como modelo probabilístico conjunto de los datos de la Tabla 1, ya que  $dma = 0.0658 < Dn = 0.1883$ .

### VALIDACIÓN DEL MODELO PROBABILÍSTICO

En la Figura 2 se han dibujado ambas probabilidades de no excedencia conjuntas (empíricas y teóricas de la Tabla 4 completa), observándose un buen balance entre

Tabla 4. Probabilidades de no excedencia conjuntas y sus diferencias para una parte de las crecientes anuales de entrada a la Presa Venustiano Carranza, México

Núm.	$F_c(x,y)$ empírica	$F(x,y)$ teórica	Diferencias	Núm.	$F_c(x,y)$ empírica	$F(x,y)$ teórica	Diferencias
1	0.3563	0.3593	-0.0030	30	0.7203	0.6922	0.0281
5	0.0498	0.0817	-0.0319	35	0.7969	0.8245	-0.0276
10	0.1648	0.1464	0.0184	38	0.7203	0.7861	-0.0658
15	0.8736	0.8875	-0.0139	44	0.6245	0.5615	0.0630
20	0.2031	0.1609	0.0422	49	0.0307	0.0223	0.0084
25	0.4330	0.3763	0.0567	52	0.1264	0.1234	0.0030

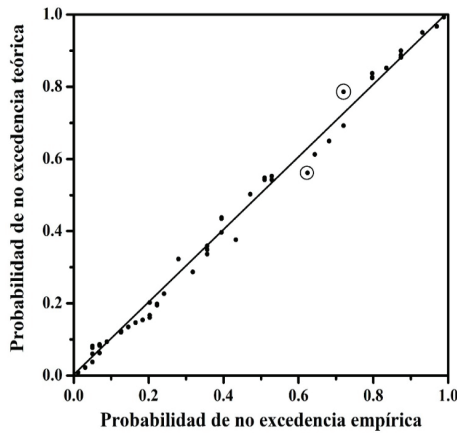


Figura 2. Contraste gráfico de probabilidades conjuntas del gasto pico y volúmenes de las crecientes anuales de entrada a la Presa Venustiano Carranza, México

RATIFICACIÓN DE LAS MARGINALES

Primeramente, los gastos pico y volúmenes de la Tabla 1 se ordenaron de menor a mayor. Después, se calcularon sus probabilidades de no excedencia *teóricas* con las ecuaciones 2 y 3 utilizando los parámetros de ajuste óptimos de la Tabla 3 para la quinta corrida del algoritmo Complex. Las probabilidades de no excedencia *empíricas* de ambas series (*Q* y *V*) se estimaron con la ecuación 20.

En las Figuras 3 y 4 se muestra el contraste gráfico de probabilidades para cada serie ordenada. Las diferencias máximas entre probabilidades empíricas y teóricas de los gastos pico y volúmenes fueron 0.0912 y  $-0.0674$ ; la primera ocurrió en el dato ordenado número 14 y la segunda en el 3, como se muestra en la Tabla 5. Como ambas diferencias absolutas son menores que  $D_n = 0.1883$  (ecuación 22), se acepta que los registros de *Q* y *V* de la Tabla 1 tienen las marginales GVE definidas con el algoritmo Complex.

Tabla 5. Probabilidades empíricas ( $F_e$ ) y teóricas en las distribuciones marginales GVE y sus diferencias para una parte de las crecientes anuales de entrada a la Presa Venustiano Carranza, México

Núm.	Q	V	$F_e$	$F(Q)$	$F(V)$	Dif Q	Dif V
1	29.5	3.75	0.0115	0.0109	0.0565	0.0006	-0.0450
3	50.9	11.48	0.0498	0.0394	0.1172	0.0104	-0.0674
10	89.2	19.12	0.1839	0.1370	0.1889	0.0470	-0.0050
14	99.5	28.04	0.2605	0.1693	0.2759	0.0912	-0.0154
20	146.7	35.02	0.3755	0.3216	0.3413	0.0536	0.0342
30	243.4	63.62	0.5670	0.5662	0.5554	0.0008	0.0117
40	449.2	99.71	0.7586	0.8053	0.7158	-0.0467	0.0428
52	4320.7	983.02	0.9885	0.9968	0.9928	-0.0083	-0.0043

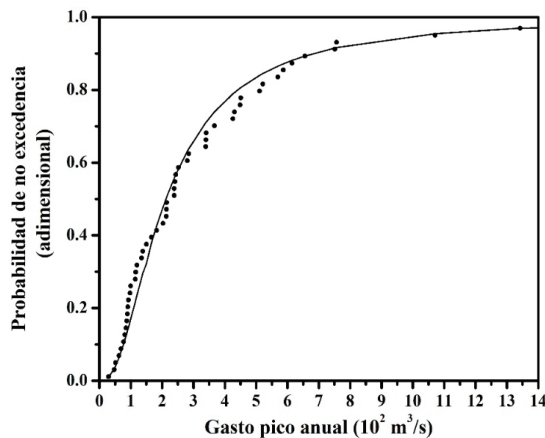


Figura 3. Distribución marginal GVE del gasto pico anual de las crecientes anuales de entrada a la Presa Venustiano Carranza, México

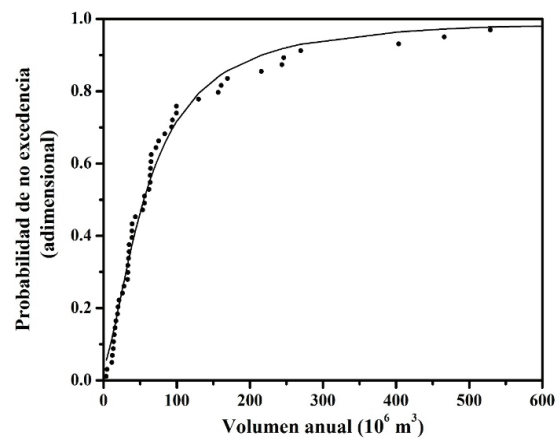


Figura 4. Distribución marginal GVE del volumen anual de las crecientes anuales de entrada a la Presa Venustiano Carranza, México



VERIFICACIÓN DE LAS RESTRICCIONES DE PROBABILIDAD

Antes de proceder a estimar los periodos de retorno conjuntos de diseño  $T'(Q,V)$ , es conveniente verificar la ecuación 7, que establece las restricciones de la probabilidad conjunta. Lo anterior se muestra en la Tabla 6 para un número reducido de parejas de datos históricos.

Se observa en la Tabla 6 y en su versión completa, que el valor de la columna 5 es siempre mayor que el de la 4 y menor que el más pequeño de las columnas 6 ó 7. Por lo cual, se cumple con la restricción que impone la ecuación 7.

PREDICCIONES UNIVARIADAS Y PERIODOS DE RETORNO CONJUNTOS DE DISEÑO

Aplicando en las ecuaciones 5 y 6 los seis parámetros de ajuste óptimos de la quinta corrida del algoritmo Complex, mostrados en la Tabla 3, se obtuvieron las predicciones mostradas en la Tabla 7.

En esta aplicación numérica, las predicciones univariadas y los periodos de retorno conjuntos de diseño, fueron establecidos con apego estricto a sus ocurrencias reales. Por lo anterior, los datos de  $Q$  y  $V$  de la Tabla 1, se ordenaron de menor a mayor, para detectar sus valores extremos o dispersos (*outliers*); es decir, los que se apartan de manera notable de la tendencia general. Para el gasto pico se definió uno de 4320.7 m<sup>3</sup>/s y para el volumen se obtuvieron dos: uno de 529.11 y otro de 983.02 Mm<sup>3</sup>.

Debido a la amplitud del registro conjunto, de 52 años, las primeras predicciones por revisar de la Tabla 7 son del periodo de retorno de 50 años, cuyos valores de 1671 m<sup>3</sup>/s y 561 Mm<sup>3</sup> se consideran acordes con los datos extremos observados. Para los periodos de retorno

mayores, resultan aceptables, como máximo, las de 500 años, cuya predicción de gasto pico de 5499 m<sup>3</sup>/s puede aceptarse factible de ocurrir; en cambio, la del volumen es casi del doble del máximo observado. Por lo anterior, los periodos de retorno conjuntos de diseño serán los cuatro siguientes: 50, 100, 250 y 500 años.

EVENTOS DE DISEÑO OBTENIDOS CON REGRESIÓN

El diagrama de dispersión de las 52 parejas de datos originales (Tabla 1) mostró una nube de puntos con tendencia lineal con un coeficiente de correlación lineal ( $r_{xy}$ ) de 0.9188 La ecuación de regresión lineal que la representa es la siguiente (Campos, 2003) (Ecuación 23).

$$V = 15.7991 + 0.2497 \cdot Q \tag{23}$$

De la Tabla 7 se obtienen las predicciones siguientes para el gasto pico ( $Q$ ) y los cuatro periodos de retorno conjuntos de diseño: 1671, 2406, 3861 y 5499 m<sup>3</sup>/s. Con base en la ecuación 23 se definen los volúmenes anuales ( $V$ ) siguientes: 433, 617, 980 y 1389 Mm<sup>3</sup>, para los eventos de diseño buscados. Estas cuatro parejas de valores de  $Q$  y  $V$  se han dibujado en la Figura 1 y se indican con la letra "r".

EVENTOS DE DISEÑO CONDICIONALES TIPO  $T(Q|V)$

Están definidos por las ecuaciones 18 y 19, cuya aplicación emplea las expresiones 2 a 4. Para los cuatro periodos de retorno conjuntos de diseño definidos, se obtienen de la Tabla 7 los siguientes cuatro gastos pico: 1671, 2406, 3861 y 5499 m<sup>3</sup>/s. Adoptando tales

Tabla 6. Verificación de las restricciones de probabilidad conjunta de una parte de las crecientes anuales de entrada a la Presa Venustiano Carranza, México

1	2	3	4	5	6	7
Núm.	$Q$	$V$	$F(x) \cdot F(y)$	$F(x,y)$	$F(x)$	$F(y)$
1	241.0	38.76	0.2103	0.3593	0.5615	0.3745
15	655.9	269.58	0.8305	0.8875	0.8932	0.9297
30	521.6	94.18	0.5891	0.6922	0.8452	0.6970
45	756.5	244.05	0.8406	0.8996	0.9161	0.9176
52	85.0	64.22	0.0694	0.1234	0.1242	0.5589

Tabla 7. Predicciones univariadas calculadas con la distribución GVE en las crecientes anuales de entrada a la Presa Venustiano Carranza, México

Datos	Periodos de retorno univariados, en años							
	2	5	10	25	50	100	250	500
$Q$ (m <sup>3</sup> /s)	212	441	682	1149	1671	2406	3861	5499
$V$ (Mm <sup>3</sup> )	55	133	216	378	561	821	1340	1931

gastos como valores *condicionantes* ( $X \leq x$ ), se procedió por tanteos del volumen ( $y$ ) a estimar, con la ecuación 19, el periodo de retorno condicional que debe igualar al del gasto pico. Los volúmenes estimados fueron: 386, 571, 940 y 1360 Mm<sup>3</sup>. Estas cuatro parejas de valores de  $Q$  y  $V$  se han dibujado en la Figura 1 y se indican con la letra "c".

GRÁFICAS DEL PERIODO DE RETORNO CONJUNTO  $T'(Q,V)$

Los periodos de retorno conjuntos de tipo AND se estiman con base en la ecuación 15. Para cada periodo de retorno conjunto de diseño se seleccionan arbitrariamente volúmenes y gastos pico, para obtener sus probabilidades de no excedencia marginales (ecuaciones 2 y 3) y conjunta (ecuación 4). En la Tabla 8 se muestran algunos resultados para definir las cuatro gráficas de la Figura 1.

En la Figura 1 o en la Tabla 8 se pueden seleccionar infinitas parejas de  $Q$  y  $V$ , que satisfacen el periodo de retorno conjunto de diseño y que definen como *subgrupo de parejas críticas* las que están dentro de la porción curva de cada gráfica de  $T'(Q,V)$ , fuera de las rectas asíntotas (Volpi & Fiori, 2012).

Las combinaciones de gasto pico y volumen que tienen el mismo *periodo de retorno conjunto*, establecen crecientes o *hidrogramas* que producirán diferentes efectos en el embalse que se diseña o revisa; adoptando por seguridad, el que genera las condiciones más críticas, severas o desfavorables. Lo anterior, está incorporando en el diseño hidrológico las características físicas del vertedor y almacenamiento o vaso del embalse en proyecto o bajo revisión. Para formar cada hidrograma de diseño, existen métodos teóricos y empíricos (Aldama, 2000; Ramírez & Aldama, 2000).

Tabla 8. Parejas de gasto pico y volumen anual utilizadas para definir las gráficas del periodo de retorno conjunto (Figura 1), con el modelo bivariado GVE, en las crecientes de entrada a la Presa Venustiano Carranza, México

$T'(Q,V)$ 50 años		$T'(Q,V)$ 100 años		$T'(Q,V)$ 250 años		$T'(Q,V)$ 500 años	
Vol. Mm <sup>3</sup>	Q m <sup>3</sup> /s	Vol. Mm <sup>3</sup>	Q m <sup>3</sup> /s	Vol. Mm <sup>3</sup>	Q m <sup>3</sup> /s	Vol. Mm <sup>3</sup>	Q m <sup>3</sup> /s
0	1671	0	2406	0	3861	0	5499
200	1668	300	2402	600	3847	500	5498
300	1655	500	2366	700	3833	800	5487
350	1638	550	2343	800	3808	900	5478
400	1608	600	2307	900	3764	1000	5463
450	1551	650	2252	1000	3692	1100	5441
475	1505	700	2163	1100	3566	1200	5410
500	1435	725	2097	1150	3468	1300	5365
510	1397	750	2006	1200	3328	1400	5299
520	1349	760	1958	1225	3234	1500	5204
530	1287	770	1901	1250	3113	1550	5140
540	1200	780	1831	1260	3054	1600	5062
545	1140	790	1742	1270	2987	1650	4965
550	1061	800	1620	1280	2907	1700	4840
555	940	805	1537	1290	2816	1725	4765
560	653	810	1427	1300	2708	1750	4677
561	0	815	1260	1310	2569	1775	4574
		818	1087	1320	2381	1800	4451
		821	0	1330	2087	1825	4301
				1335	1833	1850	4108
				1340	0	1875	3847
						1900	3447
						1920	2824
						1931	0

## CONCLUSIONES

Se expuso la aplicación de la distribución GVE bivariable (GVEb), en el análisis de frecuencias conjunto de los 52 gastos pico ( $Q$ ) y volúmenes ( $V$ ) anuales de las crecientes de entrada a la Presa Venustiano Carranza (*Don Martín*), Coahuila, México. El ajuste de la GVEb incluye ocho etapas, que fueron descritas y que abarcan desde la prueba de aleatoriedad de los datos, hasta la estimación de los periodos de retorno conjuntos de tipo AND. La etapa más importante es la validación de la GVEb, que implica el contraste entre las probabilidades empíricas y teóricas *conjuntas* (Figura 2).

En el análisis de frecuencias conjunto (Figura 1) se definen decenas de *parejas críticas* de  $Q$  y  $V$ , para formar los hidrogramas de diseño, que producirán diferentes efectos en el embalse que se dimensiona o revisa. Se adopta por seguridad, el que genera las condiciones más severas. De esta manera se están incorporando en el diseño hidrológico las características físicas del embalse (lago y vertedor) bajo estudio.

La GVEb es adecuada para procesar de manera conjunta registros de  $Q$  y  $V$  de crecientes anuales, que presentan valores extremos dispersos (*outliers*), pero que no están integrados por poblaciones mixtas. Por lo anterior, la GVEb permite procesar crecientes de cuencas medianas y grandes, de zonas o regiones con mecanismos meteorológicos únicos de formación de las crecientes.

## REFERENCIAS

- Aldama, A. A. (2000). Hidrología de avenidas. Conferencia Enzo Levi 1998. *Ingeniería Hidráulica en México*, XV(3), 5-46.
- Aldama, A. A., Ramírez, A. I., Aparicio, J., Mejía-Zermeño, R., & Ortega-Gil, G. E. (2006). *Seguridad hidrológica de las presas en México*. Jiutepec, Morelos: Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. 188 p.
- Bobée, B., & Ashkar, F. (1991). *The gamma family and derived distributions applied in Hydrology*. Chapter 1: Data requirements for hydrologic frequency analysis (pp. 1-12). Littleton, Colorado, U.S.A.: Water Resources Publications. 203 p.
- Box, M. J. (1965). A new method of constrained optimization and a comparison with other methods. *Computer Journal*, 8(1), 42-52. <https://doi.org/10.1093/comjnl/8.1.42>
- Bunday, B. D. (1985). *Basic optimisation methods*. Theme 6.2: The Complex method (pp. 98-106). London, England: Edward Arnold publishers, Ltd. 128 p.
- Campos-Aranda, D. F. (2003). *Introducción a los métodos numéricos: Software en basic y aplicaciones en hidrología superficial*. Capítulo 5: Ajuste de Curvas (pp. 93-127) y Capítulo 9: Optimización Numérica (pp. 172-211). San Luis Potosí, México: Editorial Universitaria Potosina. 222 p.
- Campos-Aranda, D. F. (2006). *Análisis probabilístico univariado de datos hidrológicos. Avances en hidráulica 13*. AMH-IMTA. México, 172 p.
- Coles, S. (2001). *An introduction to statistical modeling of extreme values*. Chapter 2: Basics of Statistical Modeling (pp. 18-44) and chapter 3: Classical extreme value theory and models (pp. 45-73). London, England: Springer Verlag. 208 p.
- Escalante-Sandoval, C. A., & Raynal-Villaseñor, J. A. (1994). A tri-variate extreme value distribution applied to flood frequency analysis. *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology*, 99(4), 369-375.
- Escalante-Sandoval, C. A., & Reyes-Chávez, L. (2004). Análisis bivariado de gastos máximos anuales con distribuciones marginales TCEV. En XVIII Congreso Nacional de Hidráulica. (pp. 523-529). 10 al 12 de noviembre. San Luis Potosí, México.
- Goel, N. K., Seth, S. M., & Chandra, S. (1998). Multivariate modeling of flood flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, 124(2), 146-155. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1998\)124:2\(146\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1998)124:2(146))
- Hosking, J. R., & Wallis, J. R. (1997). *Regional frequency analysis. An approach based on L-moments*. Appendix: L-moments for some specific distributions (pp. 191-209). Cambridge, England: Cambridge University Press. 224 p.
- Meylan, P., Favre, A. C., & Musy, A. (2012). *Predictive hydrology. A frequency analysis approach*. Chapter 3: Selecting and checking data series (pp. 29-70) and Chapter 5: Estimation of model parameters (pp. 9-102). Boca Raton, Florida, U.S.A.: CRC Press. 212 p.
- Ramírez-Orozco, A. I., & Aldama, A. A. (2000). *Análisis de frecuencias conjunto para estimación de avenidas de diseño*. Capítulo 1: Teoría estadística y análisis de frecuencias conjunto (pp. 25-58). Avances en Hidráulica Núm. 7. México: AMH-IMTA. 169 p.
- Rao, A. R., & Hamed, K. H. (2000). *Flood frequency analysis*. Theme 1.8: Tests on hydrologic data (pp. 12-21) and Chapter 7: Extreme value distributions (pp. 207-257). Boca Raton, Florida, U.S.A.: CRC Press. 350 p.
- Shiau, J. T. (2003). Return period of bivariate distributed extreme hydrological events. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 17(1-2), 42-57. <https://doi.org/10.1007/s00477-003-0125-9>
- Stedinger, J. R. (2017). *Flood frequency analysis* (pp. 76.1-76.8). En: Handbook of Applied Hydrology. Singh, V. P. (Ed.). New York, U.S.A.: McGraw-Hill Education. Second Edition.
- Volpi, E., & Fiori, A. (2012). Design event selection in bivariate hydrological frequency analysis. *Hydrological Sciences Journal*, 57(8), 1506-1515. <https://doi.org/10.1080/02626667.2012.726357>
- Yue, S., Ouarda, T. B. M. J., Bobée, B., Legendre, P., & Bruneau, P. (1999). The Gumbel mixed model for flood frequency analysis. *Journal of Hydrology*, 226(1-2), 88-100. [https://doi.org/10.1016/S0022-1694\(99\)00168-7](https://doi.org/10.1016/S0022-1694(99)00168-7)
- Yue, S. (2000a). Joint probability distribution of annual maximum storm peaks and amounts as represented by daily rainfalls. *Hydrological Sciences Journal*, 45(2), 315-326. <https://doi.org/10.1080/02626660009492327>

Yue, S. (2000b). The gumbel mixed model applied to storm frequency analysis. *Water Resources Management*, 14(5), 377-389.

<https://doi.org/10.1023/A:1011124423923>

Yue, S., & Rasmussen, P. (2002). Bivariate frequency analysis: discussion of some useful concepts in hydrological application.

*Hydrological Processes*, 16(14), 2881-2898. <https://doi.org/10.1002/hyp.1185>

**Cómo citar:**

Campos-Aranda, D. F. (2023). Etapas del análisis de frecuencias conjunto de crecientes con la distribución GVE bivariada. *Ingeniería Investigación y Tecnología*, 24 (02), 1-12. <https://doi.org/10.22201/fi.25940732e.2023.24.2.011>