Ingeniería Investigación y Tecnología
Volume XXVI (Issue 4), October-December 2025 1-10
ISSN 2594-0732 FI-UNAM Peer-reviewed article
Article information: Received: June 11, 2025, accepted: August 29, 2025.

https://doi.org/10.22201/fi.25940732e.2025.26.4.030

Ingeniería Investigación y Tecnología

Estrategia óptima en procesos de Markov con una o más cadenas
Optimal strategy in Markov processes with one or more chains

Acosta-Flores, José Jesús
División de Ingeniería Mecánica e Industrial
Facultad de Ingeniería. UNAM
E-mail: jjaf@unam.mx
https://orcid.org/0000-0001-8101-5797

Resumen

El propósito de este artículo es determinar la estrategia óptima que maximice el logro del objetivo del decisor. Esta estrategia óptima establece, para cada estado del sistema, la mejor decisión, considerando las preferencias del tomador de decisiones y la incertidumbre. Para ello, se desarrollaron dos diagramas de flujo. En el primer diagrama de flujo, para cada estado del sistema y cada decisión, se cuantifican los equivalentes bajo certeza de las loterías que tienen las recompensas al pasar de un estado a otro con sus correspondientes probabilidades. Para ello, se consideran las preferencias del decisor con funciones de utilidad lineal (decisor con comportamiento neutro al riesgo) o exponenciales (decisor con comportamiento de propensión o aversión constantes al riesgo). El segundo diagrama, que tiene como una de sus entradas los equivalentes bajo certeza calculados en el primer diagrama, determina la estrategia óptima, a través de procesos de Markov con una o más cadenas y programación dinámica, utilizando el método de Ronald Howard complementado con la teoría de decisiones. Ambos diagramas de flujo son totalmente originales. Las limitaciones de este estudio son dos: Es válido solo para un decisor y para un objetivo. Finalmente, se ilustró el método con un ejemplo hipotético del funcionamiento de una presa.
Descriptores: Teoría de decisiones, procesos de Markov, programación dinámica, funciones utilidad, equivalentes bajo certeza.

Abstract

The purpose of this article is to determine the optimal strategy that maximizes the achievement of the decision-maker's goal. This optimal strategy establishes, for each state of the system, the best decision, considering the decision-maker's preferences and uncertainty. To this end, two flow diagrams were developed. In the first flowchart, for each state of the system and each decision, the equivalents under certainty of the lotteries that have the rewards when passing from one state to another with their corresponding probabilities are quantified. To do this, the preferences of the decision-maker are considered with linear utility functions (decision-maker with risk-neutral behavior) or exponential (decision-maker with constant risk-aversion or propensity behavior). The second diagram, which has as one of its inputs the equivalents under certainty calculated in the first diagram, determines the optimal strategy, through Markov processes with one or more chains and dynamic programming, using Ronald Howard's method complemented by decision theory. Both flowcharts are totally original. The limitations of this study are twofold: it is valid only for one decision-maker and for one objective. Finally, the method was illustrated with a hypothetical example of the operation of a dam.
Keywords: Decision Theory, Markov processes, dynamic programming, utility functions, equivalents under certainty.

https://doi.org/10.22201/fi.25940732e.2025.26.4.030

Introducción

Un proceso de Markov (Howard, 1971) es un modelo probabilístico que se utiliza para el análisis de sistemas complejos. Un sistema complejo tiene procesos en serie, en paralelo y con realimentación interactuando entre ellos. Existen otros modelos para su análisis, por ejemplo, los de Dinámica de Sistemas, cuyo creador es Jay W. Forrester, donde las ecuaciones diferenciales se transforman en ecuaciones recursivas y tienen como propósito mejorar la comprensión del sistema viendo el comportamiento de este en el tiempo, pero no contemplan la determinación de estrategias mediante la optimación, que es lo que se hace en este artículo.

En los procesos de Markov se tienen dos conceptos que son fundamentales: Estado y transición. El estado detalla la situación de un sistema. Un sistema químico está totalmente especificado cuando se sabe su temperatura, su presión y su volumen. Un vehículo espacial lo está cuando se conoce su posición, su masa y su velocidad.

Las transiciones pueden darse en intervalos constantes o variables. Al final de cada uno de estos intervalos el sistema puede permanecer en el mismo estado o cambiar de estado.

Se utiliza la notación $s\ (n + 1) = j$ para representar que el sistema se encuentra en el estado j en la transición $n + 1$.

Así, una trayectoria de estados en el tiempo podría ser $s\ (n) = i,\ s\ (n - 1) = k,\ \ldots,\ s\ (0) = m$, indicando que el sistema en la transición cero comenzó en el estado y fue pasando de un estado a otro hasta que en la transición $n - 1$ estuvo en el estado k y en la transición n en el estado i.

Andrei Markov (1856, 1922) tuvo como hipótesis que:

$$P(s\ (n+1) = j \mid s\ (n) = i,\ s\ (n-1) = k,\ \ldots,\ s\ (0) = m) = P\ (s\ (n+1) = j \mid s\ (n) = i)$$

Es decir, que en un proceso de Markov la probabilidad de pasar de un estado a otro depende solo del estado donde se encuentre.

Los estados (Drake, 1967) pueden ser transitorios, recurrentes o atrapantes. Un estado es transitorio si el sistema, al transcurrir el tiempo, no puede regresar a ese estado. Un estado es recurrente si, al pasar el tiempo, siempre es posible que el sistema regrese a él. Un estado es atrapante si cuando el sistema llega a él no puede salir del mismo.

Una cadena (Acosta, 2009) es un conjunto de estados con la propiedad que cuando el sistema entra a cualquiera de ellos, nunca sale del conjunto. Los procesos pueden tener una o varias cadenas, donde el número máximo de cadenas que puede tener un sistema es su número de estados.

Al revisar la literatura reciente (Benaim & Hurth, 2022; Boucherie & Van-Dijk, 2017; Bouguila *et al.*, 2022; Cocozza, 2021; Hanada & Matsuura, 2022; Kao *et al.*, 2023; Kochs, 2020; Lozovanu & Pickl, 2015; Luan *et al.*, 2023; Privault, 2018) ninguno de ellos considera la estructura de preferencias del decisor ni la estrategia óptima de decisión.

Por otra parte, Acosta (2025) presenta un método interactivo para determinar la mejor estrategia en procesos de Markov con una cadena. Este método toma en cuenta la estructura de preferencias del decisor con los equivalentes bajo certeza y los procesos de Markov en el límite mediante programación dinámica. Una de las limitantes de este método es que se puede aplicar cuando solo existe una cadena.

Howard (1962), en su tesis doctoral, para determinar la mejor estrategia de solución cuando hay varias cadenas considera la solución del sistema de ecuaciones lineales:

$$g_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} g_j \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,N$$

$$v_i + g_i - q_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij} v_j \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,N$$

Donde $q_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij},\ r_{ij}$; r_{ij} es la recompensa al pasar del estado i al estado j; y las incógnitas son las variables g_i y v_i. Para que coincida el número de ecuaciones con el de variables se hace el valor de una v_i en cada cadena igual a cero. Se conoce también que en cada cadena las g_i son iguales.

En este artículo se utilizan estas ecuaciones modificando el método presentado por Acosta (2025) para que sea aplicable cuando hay varias cadenas.

Dependiendo del equivalente bajo certeza que dé el decisor se considera neutralidad, aversión o propensión constantes, con su función utilidad correspondiente (Keeney & Raiffa, 1976; Acosta, 2019 y 2024).

La situación de aversión o propensión constantes está apoyada en 30 años de experiencia de Keeney (1992) donde el decisor siempre se ha comportado de esta manera.

Método propuesto

Parte Uno. Cálculo de EBC_i^k equivalentes bajo certeza para cada estado i y cada decisión k:

Paso 1-1. Proporcione los datos de entrada: N, número de estados del sistema; p_{ij}^k, probabilidades de pa-

https://doi.org/10.22201/fi.25940732e.2025.26.4.030

sar de un estado i a un estado j si se toma la decisión k; r_{ij}^{k}, recompensas al pasar de un estado i a un estado j si se toma la decisión k.

Paso 1-2. Determine $a^* = max\{r_{ij}^{k}\}$.

Paso 1-3. Forme la lotería $L = (a^*, 0.5; 0, 0.5)$, donde con probabilidad 0.5 se tiene a^* y con probabilidad 0.5 no se obtiene nada.

Paso 1-4. Pregunte al decisor el equivalente bajo certeza (EBC) de esa lotería, o sea, una cantidad que le es indiferente con la lotería L.

Paso 1-5. Calcule el valor esperado (VE) de la lotería, donde $VE = (0.5)\ (a^*)$.

Paso 1-6. Compare VE con EBC. Si VE > EBC vaya al paso 1-7; si VE < EBC muévase al paso 1-8; si VE = EBC diríjase al paso 1-9.

Paso 1-7. Calcule $c > 0$ que resuelve la ecuación $2e^{-cEBC} = e^{-ca^*} + 1$; después determine $EBC_i^k = -1/c\ Ln\left(\sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k e^{-cr_{ij}^k}\right) \forall i$, vaya al Paso 2-1.

Paso 1-8. Calcule $c > 0$ que resuelve la ecuación $2e^{cEBC} = e^{ca^*} + 1$; después determine $EBC_i^k = \frac{1}{c} Ln\left(\sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k e^{-cr_{ij}^k}\right)\ \forall i$; vaya al Paso 2-1.

Paso 1-9. Determine $EBC_i^k = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k r_{ij}^k$; vaya al Paso 2-1.

Parte Dos. Determinación de la estrategia óptima:

Paso 2-1. Los datos de entrada de esta parte son: p_{ij}^{k}, probabilidades de pasar de un estado i a un estado j si se toma la decisión k, las cuales se obtuvieron en la Parte 1-1; EBC_i^k, equivalentes bajo certeza para cada estado i y cada decisión k, que fueron el resultado de los Pasos 1-7, 1-8 ó 1-9.

Paso 2-2. Haga el contador $C = 0$.

Paso 2-3. Para cada estado i determine la k' que corresponde al EBC_i^k máximo y haga $d_i = k'$.

Paso 2-4. Forme el vector $d(C) = \{d_i\}$ y elabore la matriz de probabilidades de transición de la estrategia $d(C)$, $P = \{p_{ij}^{di}\}$.

Paso 2-5. Resuelva el sistema de ecuaciones:

$$g_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{di} g_j \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

$$v_i + g_i = EBC_i^{di} + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{k} v_j \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

haciendo el último v_i en cada cadena igual a cero.

Paso 2-6. Para cada estado i encuentre la decisión k' que maximiza $EBC_i^k + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k v_j$; después, haga la decisión en el estado i igual a k', o sea $d_i = k'$.

Paso 2-7. Actualice el contador, $C = C + 1$; actualice el vector de decisiones $d(C) = \{d_i\}$.

Paso 2-8. Es ¿$d\ (C) = d\ (C - 1)$? En caso afirmativo termina el método, $d(C)$ es la estrategia óptima. Si no es así, vaya al Paso 2-9.

Paso 2-9. Elabore la matriz de probabilidades de transición de la estrategia $d(C)$, $P = \{p_{ij}^{di}\}$. Continúe en el Paso 2-5.

El diagrama de flujo de la Parte Uno está en la Figura 1, y el de la Parte Dos en la Figura 2.

Se tienen adicionalmente ciertos comentarios que pueden ser útiles para el desarrollo de los Pasos o para la deducción de algunas de las fórmulas en ellos.

En el Paso 1-3, la lotería L puede considerarse como si se tratara de un volado con una moneda justa donde los premios son a^* y 0.

En el Paso 1-4, si la lotería L es atractiva, su EBC es la mínima cantidad que el tomador de decisiones estaría dispuesto a aceptar a cambio de esta; si no es así, el EBC es la máxima cantidad que estaría dispuesto a pagar para que otra persona se hiciera cargo de ella.

En el Paso 1-7, cuando VE > EBC y las preferencias del tomador de decisiones crecen al aumentar la recompensa, entonces el decisor tiene aversión constante al riesgo y, por tanto, su función utilidad es $u(x) = -e^{-cx}$.

$$\text{Como: } EBC \sim L,\ u(EBC) = u(L) \tag{1}$$

$$\text{Donde: } u(EBC) = -e^{-cEBC} \tag{2}$$

$$u(L) = 0.5u\ (a^*) + 0.5u\ (0) = -0.5e^{-ca^*} - 0.5e^{0c} = -0.5e^{-ca^*} - 0.5 \tag{3}$$

Sustituyendo (3) y (2) en (1) y multiplicando por –2 queda $2e^{-cEBC} = e^{-ca*} + 1$.

En cuanto a la segunda ecuación, como:

$$EBC_i^k \sim L_i = (r_{i1}^k, r_{i2}^k, \ldots, r_{iN}^k; p_{i1}^k, p_{i2}^k, \ldots, p_{iN}^k)$$

Entonces:

$$u(EBC_i^k) = u(L_i), \text{ o sea } -e^{-cEBC_i^k} = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k \left(-e^{-cr_{ij}^k}\right)$$

Con logaritmo natural en ambos lados de la igualdad además de multiplicar por –1 queda:

$$-cEBC_i^k = Ln\left(\sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k e^{-cr_{ij}^k}\right) \text{por lo que } EBC_i^k = \frac{-1}{c} Ln\left(\sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k e^{-cr_{ij}^k}\right)$$

Cuando VE > EBC y las preferencias del tomador de decisiones disminuyen al aumentar la recompensa, entonces el decisor tiene propensión constante al riesgo y, por tanto, su función utilidad es $u(x) = e^{-cx}$.

Después de hacer las operaciones descritas anteriormente se llega al mismo resultado:

$$EBC_i^k = \frac{-1}{c} Ln\left(\sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k e^{-cr_{ij}^k}\right)$$

https://doi.org/10.22201/fi.25940732e.2025.26.4.030

En el Paso 2-5, cuando se tiene solo una cadena, todas las $g_i = g$; luego $g_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{di} g_j$ es $g = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{di} g$; g=$g \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{di}$; ya que esa sumatoria de probabilidades es igual a uno, queda una identidad $g \equiv g$; de manera que solo hay que resolver el segundo grupo de ecuaciones haciendo $gi = g$.

Se ilustra la aplicación del método considerando un ejemplo hipotético sobre la operación de una presa.

Ejemplo. Operación de una presa

Se tiene una presa con cinco estados posibles:

- Estado 1, presa vacía.
- Estado 2, la presa con agua en un cuarto de su capacidad.
- Estado 3, la presa con agua a la mitad de su capacidad.
- Estado 4, la presa llena a tres cuartos de su capacidad.
- Estado 5, la presa llena a toda su capacidad.

De estudios hidrológicos se conoce que la lluvia que se tendrá está dada por la función masa de probabilidad de la variable aleatoria y_0; donde cada unidad de esa variable representa lluvia de un cuarto de la capacidad de la presa. Esta función masa de probabilidad está en la Tabla 1.

Tabla 1. Función masa de probabilidad de lluvia.

y_0	$P_y(y_0)$
0	0.10
1	0.55
2	0.19
3	0.08
4	0.08

En el estado 1, presa vacía, se puede elegir una de las dos decisiones siguientes:

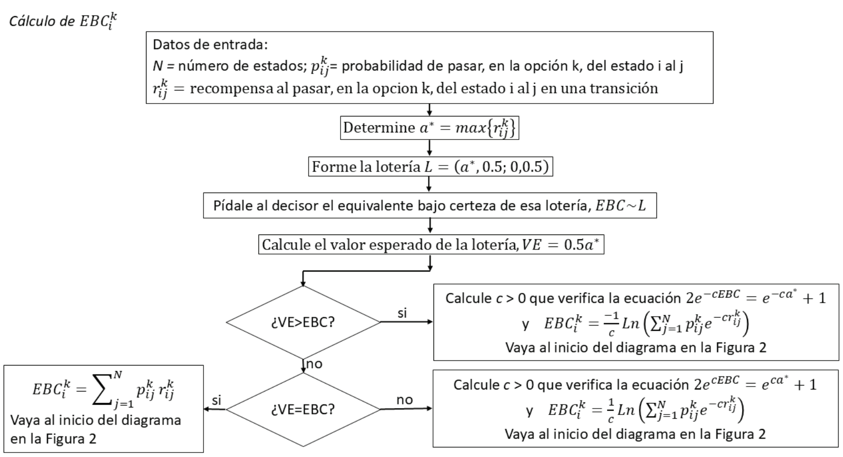

Figura 1. Cálculo de EBC_i^k.

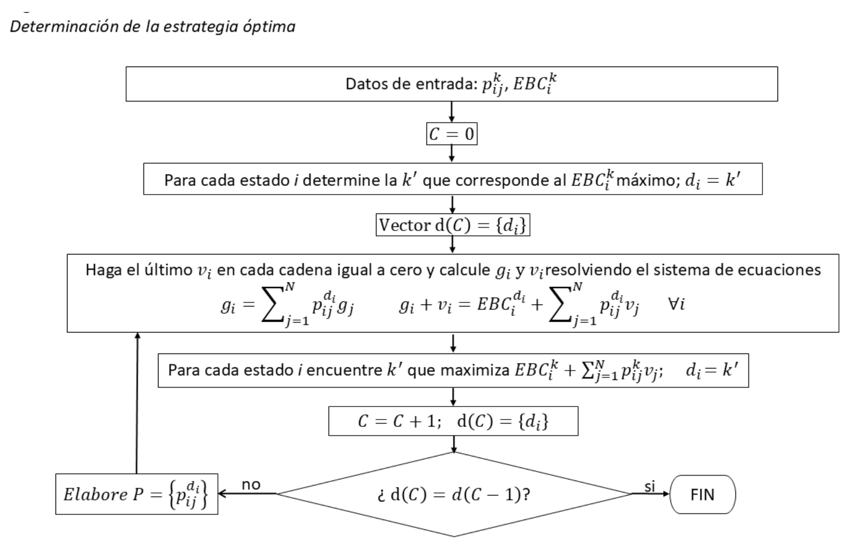

Figura 2. Determinación de la estrategia óptima.

k = 1, entregar ¼ de la capacidad de la presa.

k = 2, entregar, como máximo, la mitad de la capacidad de la presa.

En el estado 2, la presa con agua en un cuarto de su capacidad, la elección está entre tres decisiones:

k = 1, entregar ¼ de la capacidad de la presa.

k = 2, entregar, como máximo, la mitad de la capacidad de la presa.

k = 3, entregar, como máximo, 3/4 de la capacidad de la presa.

En el estado 3, la presa con agua a la mitad de su capacidad, también hay tres opciones para elegir una de ellas:

k = 1, entregar ¼ de la capacidad de la presa.

k = 2, entregar, como máximo, la mitad de la capacidad de la presa.

k = 3, entregar, como máximo, 3/4 de la capacidad de la presa.

En el estado 4, la presa llena a tres cuartos de su capacidad, se tienen dos decisiones posibles:

k = 1, entregar, como máximo, la mitad de la capacidad de la presa.

k = 2, entregar, como máximo, 3/4 de la capacidad de la presa.

En el estado 5, la presa llena a toda su capacidad, se tienen dos decisiones:

k = 1, entregar, como máximo, la mitad de la capacidad de la presa.

k = 2, entregar, como máximo, 3/4 de la capacidad de la presa.

Parte Uno. Cálculo de EBC_i^k equivalentes bajo certeza para cada estado *i* y cada decisión *k*:

Paso 1-1. Proporcione los datos de entrada: N, número de estados del sistema; p_{ij}^k, probabilidades de pasar de un estado *i* a un estado *j* si se toma la decisión *k*; r_{ij}^k, recompensas al pasar de un estado *i* a un estado *j* si se toma la decisión *k*.

El valor de N es 5 estados, y los valores de p_{ij}^k y r_{ij}^k están en la Tabla 2.

En la Tabla 2 las probabilidades se calcularon de la manera siguiente:

Cuando la presa está en el estado 1, presa vacía, y se toma la alternativa 1, entregar un cuarto de su capacidad, pasar de presa vacía a presa vacía se da cuando no llueve o cuando llueve ¼ de su capacidad, lo cual ocurre con una probabilidad igual a $p_y(0) + p_y(1) = 0.10 + 0.55 = 0.65$; pasar del estado 1 al estado 2, presa vacía a un cuarto de su capacidad, es posible solo cuando llueve la mitad de la capacidad de la presa, lo cual ocurre con una probabilidad igual a $p_y(2) = 0.19$ pasar del estado 1 al estado 3, presa vacía a la mitad de su capacidad, es posible solo cuando llueven tres cuartos de la capacidad de la presa, lo cual sucede con una probabilidad igual a $p_y(3) = 0.08$ pasar del estado 1 al estado 4, presa vacía a tres cuartos de su capacidad, se tiene solo cuando llueven toda la capacidad de la presa, lo cual sucede con una probabilidad igual a $p_y(4) = 0.08$ finalmente, pasar del estado 1 al estado 5, presa vacía a presa llena es imposible, luego su probabilidad es 0.

Tabla 2. Probabilidades p^k_{ij} y recompensas r^k_{ij}.

Estado i	Alternativa k	Probabilidades de transición					Recompensas				
		p^k_{i1}	p^k_{i2}	p^k_{i3}	p^k_{i4}	p^k_{i5}	r^k_{i1}	r^k_{i2}	r^k_{i3}	r^k_{i4}	r^k_{i5}
1, presa vacía	1, entrega 1/4	.65	.19	.08	.08	0	5	15	25	35	45
	2, entrega 1/2	0.84	.08	.08	0	0	10	20	30	40	50
2, 1/4 capacidad	1, entrega 1/4	0.1	0.55	0.19	0.08	0.08	-5	5	15	25	35
	2, entrega 1/2	.65	.19	.08	.08	0	0	10	20	30	40
	3, entrega 3/4	0.84	.08	.08	0	0	5	15	25	35	45
3, 1/2 capacidad	1, entrega 1/4	0	0.1	0.55	0.19	0.16	-15	-5	5	15	25
	2, entrega 1/2	0.1	0.55	0.19	0.08	0.08	-10	0	10	20	30
	3, entrega 3/4	.65	.19	.08	.08	0	-5	5	15	25	35
4, 3/4 capacidad	1, entrega 1/2	0	0.1	0.55	0.19	0.16	-20	-10	0	20	30
	2, entrega 3/4	0.1	0.55	0.19	0.08	0.08	-15	-5	5	25	35
5, presa llena	1, entrega 1/2	0	0	0.1	0.55	0.35	-30	-20	-10	0	10
	2, entrega 3/4	0	0.1	0.55	0.19	0.16	-25	-15	-5	5	15

https://doi.org/10.22201/fi.25940732e.2025.26.4.030

De manera semejante se calcularon las probabilidades de los demás renglones.

Paso 1-2. Determine $a^* = max\{r_{ij}^{k}\}$.

Las cantidades r^k_{ij} están en la Tabla 2, luego $a^* = max \{r^k_{ij}\} = 50$.

Paso 1-3. Forme la lotería $L = (a^*, 0.5; 0, 0.5)$, donde con probabilidad 0.5 se tiene a^* y con probabilidad 0.5 no se obtiene nada:

$L = (a^*, 0.5; 0, 0.5) = (50, 0.5; 0, 0.5)$

Paso 1-4. Pregunte al decisor el equivalente bajo certeza (EBC) de esa lotería, o sea, una cantidad que le es indiferente con la lotería L.

El decisor estableció $EBC = 23$.

Paso 1-5. Calcule el valor esperado (VE) de la lotería, donde $VE = (0.5)\ (a^*)$, VE = (0.5) (50) =25.

Paso 1-6. Compare VE con EBC. Si VE > EBC vaya al paso 1-7; si VE < EBC muévase al paso 1-8; si VE = EBC diríjase al paso 1-9.

Como 25 > 23 vamos al paso 1-7:

Paso 1-7. Calcule $c > 0$ que resuelve la ecuación $2e^{-cEBC} = e^{-ca^*} + 1$; después determine $EBC_i^k = \frac{-1}{c} Ln\left(\sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k e^{-cr_{ij}^k}\right)$ $\forall i$.

Para resolver la ecuación $2e^{-cEBC} = e^{-ca^*} + 1$ se sustituyen los valores de EBC = 23 y $a^* = 50$ quedando $2e^{-23c} = e^{-50c} + 1$.

Aplicando el método Newton-Raphson:

$C_{n+1} = c_n - f(c_n) / f'(c_n)$

Donde: $f(c_n) = e^{-50c_n} - 2e^{-23c_n} + 1; f'(c_n) = -50e^{-50c_n} + 46e^{-23c_n}$

Proporciona: $c = 0.0064$.

Por lo que:

$$EBC_i^k = \frac{-1}{0.0064} Ln\left(\sum_{j=1}^{5} p_{ij}^k e^{-0.0064 r_{ij}^k}\right)$$

Esos valores se muestran en la Tabla 3.

Vaya al Paso 2-1.

Parte Dos. Determinación de la estrategia óptima:

Paso 2-1. Los datos de entrada de esta parte son: p_{ij}^{k}, probabilidades de pasar de un estado i a un estado j si se toma la decisión k, las cuales se obtuvieron en la Parte 1-1; EBC_i^k, equivalentes bajo certeza para cada estado i y cada decisión k, que fueron el resultado del Paso 1-7. Estos datos se encuentran en la Tabla 3.

Paso 2-2. Haga el contador $C = 0$

Paso 2-3. Para cada estado i determine la k' que corresponde al EBC_i^k máximo y haga $d_i = k'$. Lo que se presenta en la Tabla 4.

Tabla 3. Equivalentes bajo certeza EBC^k_i.

Estado i	Alternativa k	Probabilidades de transición p^k_{i1}	p^k_{i2}	p^k_{i3}	p^k_{i4}	p^k_{i5}	Equivalentes bajo certeza EBC^k_i
1	1	.65	.19	.08	.08	0	10.626
	2	0.84	.08	.08	0	0	12.294
2	1	0.1	0.55	0.19	0.08	0.08	9.559
	2	.65	.19	.08	.08	0	5.626
	3	0.84	.08	.08	0	0	7.294
3	1	0	0.1	0.55	0.19	0.16	8.859
	2	0.1	0.55	0.19	0.08	0.08	4.559
	3	.65	.19	.08	.08	0	.626
4	1	0	0.1	0.55	0.19	0.16	7.059
	2	0.1	0.55	0.19	0.08	0.08	0.926
5	1	0	0	0.1	0.55	0.35	2.376
	2	0	0.1	0.55	0.19	0.16	-1.141

Tabla 4. EBC^k_i máximo y $\boldsymbol{k'}$.

Estado i	$d_i = k'$	EBC_i^k máximo
1	2	12.294
2	1	9.559
3	1	8.859
4	1	7.059
5	1	2.376

https://doi.org/10.22201/fi.25940732e.2025.26.4.030

Paso 2-4. Forme el vector $d(C) = \{d_i\}$ y elabore la matriz de probabilidades de transición de la estrategia $d(C)$, $P = \{p^{di}_{ij}\}$.

$$d(0) = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

En la Tabla 5 está P, matriz de probabilidades de transición, para $d(0)$.

Tabla 5. Probabilidades de transición para $d(0)$.

	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5
i=1	0.84	0.08	0.08	0	0
i=2	0.10	0.55	0.19	0.08	0.08
i=3	0	0.10	0.55	0.19	0.16
i=4	0	0.10	0.55	0.19	0.16
i=5	0	0	0.10	0.55	0.35

Esta matriz corresponde a un proceso de Markov con una sola cadena.

Paso 2-5. Resuelva el sistema de ecuaciones:

$$g_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{di} g_j \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

$$v_i + g_i = EBC_i^{di} + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{k} v_j \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

haciendo el último v_i en cada cadena igual a cero.

Como se tiene una sola cadena se hace $v_5 = 0$ y todos los g_i son iguales a g quedando el sistema de ecuaciones a resolver:

$$g + v_1 = 12.294 + 0.84v_1 + 0.08v_2 + 0.08v_3$$

$$g + v_2 = 9.559 + 0.10v_1 + 0.55v_2 + 0.19v_3 + 0.08v_4$$

$$g + v_3 = 8.859 + 0.10v_2 + 0.55v_3 + 0.19v_4$$

$$g + v_4 = 7.059 + 0.10v_2 + 0.55v_3 + 0.19v_4$$

$$g = 2.376 + 0.10v_3 + 0.55v_4$$

Cuya solución es: $v_1 = 42.307$, $v_2 = 18.875$, $v_3 = 9.91$, $v_4 = 8.11$, $v_5 = 0$, $g = 7.828$.

Paso 2-6. Para cada estado i encuentre la decisión k' que maximiza $EBC^k_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{k} v_j$; después, haga la decisión en el estado i igual a k', o sea $d_i = k'$.

El cálculo para determinar k' se muestra en la Tabla 6. En la última columna de la Tabla 6 se escribió un asterisco para indicar el valor máximo. Así:

$d_1 = 2$, $d_2 = 3$, $d_3 = 3$, $d_4 = 2$, $d_5 = 1$

Paso 2-7. Actualice el contador, $C = C + 1$; actualice el vector de decisiones $d\,(C) = \{d_i\}$, C = C + 1 = 0 + 1 = 1.

$$d(1) = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Tabla 6. Determinación de k'.

Estado	Alternativa	Probabilidades de transición					Equivalentes bajo certeza	EBC_i^k
i	k	p_{i1}^{k}	p_{i2}^{k}	p_{i3}^{k}	p_{i4}^{k}	p_{i5}^{k}	EBC^k_i	$+\sum_{j=1}^{5} p_{ij}^{k} v_j$
1	1	0.65	0.19	0.08	0.08	0	10.626	43.153
	2	0.84	0.08	0.08	0	0	12.294	50.135 *
2	1	0.1	0.55	0.19	0.08	0.08	9.559	26.703
	2	0.65	0.19	0.08	0.08	0	5.626	38.153
	3	0.84	0.08	0.08	0	0	7.294	45.135 *
3	1	0	0.1	0.55	0.19	0.16	8.859	17.738
	2	0.1	0.55	0.19	0.08	0.08	4.559	21.703
	3	0.65	0.19	0.08	0.08	0	0.626	33.153 *
4	1	0	0.1	0.55	0.19	0.16	7.059	15.938
	2	0.1	0.55	0.19	0.08	0.08	0.926	18.07 *
5	1	0	0	0.1	0.55	0.35	2.376	7.8275 *
	2	0	0.1	0.55	0.19	0.16	-1.141	7.7379

https://doi.org/10.22201/fi.25940732e.2025.26.4.030

Paso 2-8. Es ¿$d(C) = d(C-1)$? En caso afirmativo, termina el método, $d(C)$ es la estrategia óptima. Si no es así, vaya al Paso 2-9.

¿$d(1) = d(0)$? La respuesta es no, por lo que hay que continuar en el Paso 2-9.

Paso 2-9. Elabore la matriz de probabilidades de transición de la estrategia $d(C)$, $P = \{p_{ij}^{di}\}$.

En la Tabla 7 está P, matriz de probabilidades de transición, para $d(1)$.

Tabla 7. Probabilidades de transición para $d(1)$.

	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5
i=1	0.84	0.08	0.08	0	0
i=2	0.84	0.08	0.08	0	0
i=3	0.65	0.19	0.08	0.08	0
i=4	0.10	0.55	0.19	0.08	0.08
i=5	0	0	0.10	0.55	0.35

Que corresponde a un proceso de Markov con una sola cadena. Continúe con el Paso 2-5.

Paso 2-5. Resuelva el sistema de ecuaciones:

$$g_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{di} g_j \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

$$v_i + g_i = EBC_i^{d_i} + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{k} v_j \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

haciendo el último v_i en cada cadena igual a cero.

Como se tiene una sola cadena se hace $v_5 = 0$ y todos los g_i son iguales a g quedando el sistema de ecuaciones a resolver:

$$g + v_1 = 12.294 + 0.84v_1 + 0.08v_2 + 0.08v_3$$

$$g + v_2 = 7.294 + 0.84v_1 + 0.08v_2 + 0.08v_3$$

$$g + v_3 = 0.626 + 0.65v_1 + 0.19v_2 + 0.08v_3 + 0.08v_4$$

$$g + v_4 = 0.926 + 0.10v_1 + 0.55v_2 + 0.19v_3 + 0.08v_4$$

$$g = 2.376 + 0.10v_3 + 0.55v_4$$

Cuya solución es: $v_1 = 31.385$, $v_2 = 26.385$, $v_3 = 17.624$, $v_4 = 12.1$, $v_5 = 0$, $g = 10.793$.

Paso 2-6. Para cada estado i encuentre la decisión k' que maximiza $EBC_i^k + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k v_j$ después, haga la decisión en el estado i igual a k', o sea $d_i = k'$.

El cálculo para determinar k' se muestra en la Tabla 8.

En la última columna de la Tabla 8 se escribió un asterisco para indicar el valor máximo. Así: $d_1 = 2$, $d_2 = 3$, $d_3 = 3$, $d_4 = 2$, $d_5 = d2$.

Paso 2-7. Actualice el contador, $C = C + 1$; actualice el vector de decisiones $d(C) = \{d_i\}$, $C = C + 1 = 1 + 1 = 2$.

$$d(2) = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Paso 2-8. Es ¿$d(C) = d(C-1)$? En caso afirmativo, termina el método, $d(C)$ es la estrategia óptima. Si no es así, vaya al Paso 2-9.

Tabla 8. Determinación de k'.

Estado i	Alternativa k	Probabilidades de transición p^k_{i1}	p^k_{i2}	p^k_{i3}	p^k_{i4}	p^k_{i5}	Equivalentes bajo certeza EBC^k_i	$EBC_i^k + \sum_{j=1}^{5} p_{ij}^k v_j$
1	1	0.65	0.19	0.08	0.08	0	10.626	38.417
	2	0.84	0.08	0.08	0	0	12.294	42.178 *
2	1	0.1	0.55	0.19	0.08	0.08	9.559	31.526
	2	0.65	0.19	0.08	0.08	0	5.626	33.417
	3	0.84	0.08	0.08	0	0	7.294	37.178 *
3	1	0	0.1	0.55	0.19	0.16	8.859	23.49
	2	0.1	0.55	0.19	0.08	0.08	4.559	26.526
	3	0.65	0.19	0.08	0.08	0	0.626	28.417 *
4	1	0	0.1	0.55	0.19	0.16	7.059	21.69
	2	0.1	0.55	0.19	0.08	0.08	0.926	22.893 *
5	1	0	0	0.1	0.55	0.35	2.376	10.793
	2	0	0.1	0.55	0.19	0.16	-1.141	13.49 *

Como $d(2) \neq d(1)$ hay que continuar en el Paso 2-9.

Paso 2-9. Elabore la matriz de probabilidades de transición de la estrategia $d(C)$:

$P = \{ p^{di}_{ij} \}$

En la Tabla 9 está P, matriz de probabilidades de transición, para $d(2)$.

Tabla 9. Probabilidades de transición para $d(2)$.

	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5
i=1	0.84	0.08	0.08	0	0
i=2	0.84	0.08	0.08	0	0
i=3	0.65	0.19	0.08	0.08	0
i=4	0.10	0.55	0.19	0.08	0.08
i=5	0	0.1	0.55	0.19	0.16

Que corresponde a un proceso de Markov con una sola cadena. Continúe con el Paso 2-5.

Paso 2-5. Resuelva el sistema de ecuaciones:

$$g_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{di} g_j \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

$$v_i + g_i = EBC_i^{d_i} + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{k} v_j \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

haciendo el último v_1 en cada cadena igual a cero.

Como se tiene una sola cadena se hace $v_5 = 0$ y todos los g_i son iguales a g; el sistema de ecuaciones a resolver es:

$$g + v_1 = 12.294 + 0.84v_1 + 0.08v_2 + 0.08v_3$$

$$g + v_2 = 7.294 + 0.84v_1 + 0.08v_2 + 0.08v_3$$

$$g + v_3 = 0.626 + 0.65v_1 + 0.19v_2 + 0.08v_3 + 0.08v_4$$

$$g + v_4 = 0.926 + 0.10v_1 + 0.55v_2 + 0.19v_3 + 0.08v_4$$

$$g = -1.141 + 0.10v_2 + 0.55v_3 + 0.19v_4$$

Cuya solución es: $v_1 = 28.097$, $v_2 = 23.097$, $v_3 = 14.359$, $v_4 = 9.1$, $v_5 = 0$, $g = 10.793$.

Paso 2-6. Para cada estado i encuentre la decisión k' que maximiza $EBC_i^k + \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^k v_j$ después, haga la decisión en el estado i igual a k', o sea $d_i = k'$.

El cálculo para determinar k' se muestra en la Tabla 10.

En la Tabla 10, en la última columna se escribió un asterisco para indicar el valor máximo. Así: $d_1 = 2$, $d_2 = 3$, $d_3 = 3$, $d_4 = 2$, $d_5 = 2$.

Paso 2-7. Actualice el contador, $C = C + 1$; actualice el vector de decisiones $d(C) = \{d_i\}$, $C = C + 1 = 2 + 1 = 3$.

$$d(3) = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Paso 2-8. Es ¿$d(C) = d(C-1)$? En caso afirmativo, termina el método, $d(C)$ es la estrategia óptima. Si no es así, vaya al Paso 2-9.

Como $d(3) = d(2)$ la estrategia óptima es $d(3)$ que consiste en entregar el agua de lluvia hasta un medio de la

Tabla 10. Determinación de k'.

Estado i	Alternativa k	Probabilidades de transición p^k_{i1}	p^k_{i2}	p^k_{i3}	p^k_{i4}	p^k_{i5}	Equivalentes bajo certeza EBC^k_i	$EBC_i^k + \sum_{j=1}^{5} p_{ij}^k v_j$
1	1	0.65	0.19	0.08	0.08	0	10.626	35.154
	2	0.84	0.08	0.08	0	0	12.294	38.892 *
2	1	0.1	0.55	0.19	0.08	0.08	9.559	28.528
	2	0.65	0.19	0.08	0.08	0	5.626	30.154
	3	0.84	0.08	0.08	0	0	7.294	33.892 *
3	1	0	0.1	0.55	0.19	0.16	8.859	20.795
	2	0.1	0.55	0.19	0.08	0.08	4.559	23.528
	3	0.65	0.19	0.08	0.08	0	0.626	25.154 *
4	1	0	0.1	0.55	0.19	0.16	7.059	18.995
	2	0.1	0.55	0.19	0.08	0.08	0.926	19.895 *
5	1	0	0	0.1	0.55	0.35	2.376	8.817
	2	0	0.1	0.55	0.19	0.16	-1.141	10.795 *

capacidad de la presa cuando está vacía; y hasta tres cuartos de la capacidad de la presa en los demás estados.

Conclusiones

En el método presentado se analizan probabilísticamente sistemas complejos que tienen procesos en línea, en paralelo y con realimentación, determinando la estrategia óptima que debe seguir el decisor.

Una de las ventajas del método presentado en este artículo es que se requiere que el decisor conteste solo una pregunta: ¿Cuánto es lo mínimo que estaría dispuesto a aceptar a cambio de una lotería con dos resultados, cuyas probabilidades de ocurrencia son iguales?

También se han elaborado dos diagramas de flujo que facilitan la aplicación del método para hacer posible su automatización.

Este método guía al analista, considerando un proceso de Markov, programación dinámica y la función utilidad del decisor para determinar su mejor estrategia de decisión. Así, modela la incertidumbre mediante procesos de Markov con una o varias cadenas y cuantifica las preferencias del decisor usando la función de utilidad que representa su estructura de preferencias, pudiendo ser de aversión constante, propensión constante o neutralidad al riesgo.

Se emplea el método desarrollado por Ronald Howard (1962), complementándolo para que las decisiones recomendadas contemplen el comportamiento del decisor, lo cual conduce a mejores decisiones.

Finalmente, el método es aplicable cuando se tienen solamente un decisor y un objetivo. Se ilustró su uso con un ejemplo hipotético sobre la operación de una presa.

Referencias

Acosta-Flores, J. J. (2009). *Ingeniería de sistemas. Métodos probabilísticos.* México: Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.

Acosta-Flores, J. J. (2019). Algoritmo para analizar decisiones con objetivos múltiples bajo incertidumbre. *Ingeniería Investigación y Tecnología*, 20(01), 1-8. https://doi.org/10.22201/fi.25940732e.2019.20n1.010

Acosta-Flores, J. J. (2024). Decisions with uncertainty using deterministic analysis. *London Journal of Engineering Research,* 24(5), 1-14. https://journalspress.uk/index.php/LJER/article/view/895

Acosta-Flores, J. J. (2025). Método interactivo para resolver procesos de decisión secuenciales. *Ingeniería Investigación y Tecnología*, 02(26), 1-9. https://doi.org/10.22201/fi.25940732e.2025.26.2.011

Benaim, M., & Hurth, T. (2022). *Markov chains on metric spaces.* Springer Nature Switzerland.

Boucherie, R. J., & Van-Dijk, N. M. (2017). *Markov decision processes in practice.* Springer International Publishing.

Bouguila, N., Fan, W., & Amayri, M. (2022). *Hidden markov models and applications.* Springer Nature Switzerland.

Cocozza-Thivent, C. (2021). *Markov renewal and piecewise deterministic processes.* Springer Nature Switzerland.

Drake-Alvin, W. (1967). *Fundamentals of applied probability theory.* McGraw-Hill Book Company.

Hanada, M., & Matsuura, S. (2022). *MCMC from scratch. A practical introduction to markov chain Monte Carlo.* Springer Nature Singapore.

Howard, R. A. (1962). *Dynamic programming and markov processes.* New York, London: The Technology Press of the MIT and John Wiley and Sons, Inc.

Howard, R. A. (1971). *Dynamic probabilistic systems.* John Wiley & Sons, Inc.

Kao, Y., Zhang, P., & Wang, C. (2023) *Analysis and design of markov jump discrete systems.* Springer Nature Singapore.

Keeney, R. L., & Raiffa, H. (1976). *Decisions with multiple objectives: Preferences and value tradeoffs.* John Wiley & Sons.

Keeney, R. L. (1992). *Value-Focused thinking. A path to creative decision making.* London, England: Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, USA.

Kochs, H. D. (2020). *Dependability of engineering systems. A markov minimal cut approach.* Springer Nature Switzerland.

Lozovanu, D., & Pickl, S. (2015). *Optimization of stochastic discrete systems and control on complex networks.* Springer International Publishing Switzerland.

Luan, X., He, S., & Liu, F. (2023). *Robust control for discrete time markovian jump systems in the finite time domain.* Springer Nature Switzerland.

Privault, N. (2018). *Understanding markov chains.* Springer Nature Singapore.

How to cite:

Acosta Flores, J. J. (2025). Estrategia óptima en procesos de Markov con una o más cadenas. *Ingeniería Investigación y Tecnología,* 26(04), 1-10. https://doi.org/10.22201/fi.25940732e.2025.26.4.030